Entwicklungsaspekte des Rechnenlernens

Fördermöglichkeiten bei beeinträchtigtem Erwerb mathematischer Kompetenzen im Grundschulalter

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. phil.

Eingereicht am 09.05.2007

von Maria Gerlach,

geb. in Dortmund

Universität Duisburg-Essen, Campus Essen

Fachbereich Bildungswissenschaften

Erstgutachterin: Prof. Dr. A. Fritz-Stratmann

Zweitgutachter: Prof. Dr. H. Steinbring

Tag der mündlichen Prüfung: 28.11.2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematik bereitet vielen Kindern Schwierigkeiten. Betrachtet man das deutsche Gesamtbild, zeigt sich, dass die Ergebnisse deutscher Schüler in internationalen und nationalen Schulleistungsvergleichsstudien (TIMMS, PISA, IGLU) häufig unterdurchschnittlich sind. So verfügen nach den Befunden der IGLU-Studie knapp 20% der Schüler am Ende der Grundschulzeit nur über mathematisches Wissen des zweiten Schuljahres. Da mathematische Inhalte systematisch aufeinander aufbauen, vergrößern sich die Defizite dieser Kinder in höheren Klassen weiter, so dass nach PISA (2003) knapp die Hälfte der 15-jährigen Hauptschüler und knapp ein Viertel der Gesamtschüler nicht über elementare Mathematikkentnnisse verfügen. Als extrem rechenschwach gelten dagegen ‚nur' ca. 6% der Kinder und als förderungsbedürftig mindestens 15% (vgl. Lorenz 2003b, 144). Gezielte Unterstützung beim Erwerb mathematischer Kompetenzen benötigen also nicht nur rechenschwache Kinder.

Im Rahmen des gesetzlich vorgegebenen Bildungs- und Erziehungsauftrags muss die Schule alle Kinder ihren individuellen Voraussetzungen entsprechend umfassend fördern. Bildungsprozesse dienen dazu, dass Kinder zum einen grundlegende, für weiteres Lernen notwendige Kenntnisse, Fähig- und Fertigkeiten erwerben. Zum anderen sollen sie ihre Persönlichkeit entfalten und ein stabiles Selbstkonzept aufbauen. Erwerben Kinder keine tragfähigen mathematischen Grundlagenkompetenzen oder ist deren Entwicklung stark verzögert, ist die Erreichung dieser Ziele gefährdet und die Schule muss darauf mit adäquaten Interventionsmaßnahmen reagieren.

Beachtet werden muss dabei, dass der Erwerb mathematischer Kompetenz nicht erst mit der Einschulung beginnt. So sind wichtige Kenntnisse und Fertigkeiten bei Schulbeginn bereits erworben und erleichtern Aufnahme, Speicherung und Vernetzung der schulisch vermittelten Inhalte. Fehlen solche wesentlichen Vorerfahrungen, erschwert dies das schulische Lernen erheblich und führt zu einer immer größeren Diskrepanz zwischen Entwicklungsstand des Kindes und schulischer Anforderung. So belegen Längsschnittuntersuchungen, dass Kinder, die zu Schulbeginn nur über geringe bereichsspezifische Vorkenntnisse verfügen, unabhängig von ihrer Intelligenz auch am Ende des zweiten Schuljahres sehr häufig zu den leistungsschwachen Rechnern zählen.

Um Kindern mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen wirksam Unterstützung bieten zu können, ist Wissen darüber notwendig, wann und wie sich mathematische Kompetenzen vorschulisch und im Grundschulalter entwickeln, welche Voraussetzungen für das schulische Mathematiklernern erforderlich sind, welche zentralen Nadelöhre es zu bewältigen gilt und wie die notwendigen Wissenselemente gezielt erfasst und gefördert werden können. Für den Bereich des Schriftspracherwerbs sind relevante Vorläuferfertigkeiten gut erforscht. Für den mathematischen Bereich werden die frühen Leistungen mittlerweile auch verstärkt in den Blick genommen, da davon auszugehen ist, dass bei rechenschwachen Kindern häufig frühe, vorschulisch zu erwerbende Entwicklungskomponenten beeinträchtigt sind. Sind bereichsspezifische Vorläuferfertigkeiten bekannt, sind eine angemessene diagnostische Erfassung sowie eine frühzeitige und effektive Intervention zur Entwicklung notwendiger Voraussetzungen möglich.

In dieser Arbeit werden daher im ersten Teil Entwicklungsaspekte und -verläufe ab dem Säuglingsalter dargestellt und in einem Entwicklungsmodell systematisiert. Dazu wird untersucht, wie sich welche Fertigkeiten entwickeln und welche Bedeutung den einzelnen Komponenten dabei zukommt. Daraus sollen Nadelöhre der mathematischen Kompetenzentwicklung abgeleitet werden, die besonders sorgfältig zu beobachten und zu unterstützen sind. Dazu ist außerdem Wissen über Lernprozesse im Allgemeinen wichtig. Deshalb wird diskutiert, wie Lernende Wissen erwerben, mit Bedeutung versehen, mit bestehenden Wissensinhalten verbinden und wie sie die Wissensnutzung und -organisation durch Selbstregulation und Strategieeinsatz beeinflussen können. Dazu gehört auch die Darstellung und kritische Analyse gängiger Methoden der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht der Grundschule. In den Blick genommen werden abschließend das Vorwissen von Schulanfängern sowie die Charakteristik beeinträchtigten Mathematiklernens, um die Bedingungen bei Schulbeginn herauszuarbeiten.

Auf dieser Grundlage werden im zweiten Teil Schlussfolgerungen für bereichsspezifische Diagnostik gezogen, indem unspezifische von mathematikspezifischen Leistungsfaktoren abgegrenzt sowie ausgewählte Tests für Vorschul- und Grundschulalter vorgestellt werden. Daran werden besonders zu prüfende Aspekte der mathematischen Kompetenzentwicklung herausgearbeitet. Auch Anforderungen an die Aufgabenkonstruktion diagnostischer Verfahren werden diskutiert. Die hier formulierten Annahmen, Schwerpunkte und Vorteile von Methoden, Inhalten und Testkonstruktion sind Grundlage der Lernstandserfassungen des eigenen Konzeptes Kalkulie (Gerlach et al. 2007).

Im letzten Teil wird das auf der Grundlage der in dieser Arbeit dargestellten Theorie entwickelte Diagnose- und Förderkonzept Kalkulie ausführlich vorgestellt. Dabei wird auf die zuvor aufgestellten Schlussfolgerungen zu Diagnose und Förderung Bezug genommen, so dass die Umsetzung der theoretischen Annahmen deutlich wird.

1. Entwicklung mathematischer Kompetenzen

1.1 Einleitung

Die Frage, wie sich das Verständnis von Zahlen, Mengen und Rechenoperationen entwickelt, lässt sich trotz mehr als 100-jähriger Forschung bis heute nicht eindeutig beantworten (vgl. Bauersfeld 2003a, 12; Radatz & Schipper 1983, 36 ff.). Das Wissen über den Erwerb mathematischer Kompetenzen, über die beteiligten Komponenten des Zahlbegriffs in ihrem Zusammenhang und in ihrer Bedeutung und insbesondere über „Nadelöhre" in diesem Entwicklungsprozess ist noch lückenhaft. Ein geschlossenes Entwicklungsmodell existiert daher noch nicht (vgl. Fritz, Ricken & Schmidt 2003b, 459; Gerster & Schultz 2000, 53). Um gezielte Unterstützung bei erschwertem Erwerb mathematischer Kompetenzen bieten und um Schwierigkeiten verstehen zu können ist Wissen über Entwicklungsaspekte des Mathematiklernens und über Prozesse des Wissenserwerbs allgemein wesentlich. Neben inhaltlichen Aspekten wird hier also ein Schwerpunkt auf die Analyse relevanter Lernprozesse gelegt. Dabei soll besonders herausgearbeitet werden, worin das spezifisch Mathematische der grundlegenden Konzepte besteht und auf welche Weise mathematischer Wissenserwerb erfolgt.

Zur Darstellung der Entwicklung mathematischer Kompetenzen werden in der Regel ‚normale' und – darauf gestützt – ‚gestörte' Entwicklungsprozesse untersucht. Dabei wird versucht, beteiligte kognitive, metakognitive und emotional-motivationale Fähigkeiten zu identifizieren. Daneben sind Ansätze von Interesse, die sich auf das Erfassen (Diagnostizieren) von Kindern mit bereits vorhandenen Schwierigkeiten beim Rechnen(lernen) und auf deren Förderung konzentrieren. Beide Perspektiven sind wichtig, um inhaltsspezifische und entwicklungsadäquate Fördermaßnahmen bestimmen zu können. In diesem Kapitel soll zunächst allgemein dargestellt werden, wie mathematische Kompetenzen zustande kommen. Dabei ist die gesamte Entwicklung ab Geburt in den Blick zu nehmen, da aufgrund neuerer Befunde davon auszugehen ist, dass bereits Säuglinge „neben den generellen assoziativen Lernmechanismen über domänenspezifische Lernpotenziale" (Weinert 2000, 358) verfügen. In späteren Kapiteln sollen dann auf dieser Basis diagnostische und remediale Folgerungen gezogen werden.

Mathematischer Wissenserwerb umfasst – ebenso wie der Erwerb von Wissen in anderen Bereichen – immer eine Vielzahl unterschiedlicher Komponenten und stellt einen hochkomplexen Prozess dar. So sind an Wissenserwerbsprozessen – in bereichsspezifischer Weise (vgl. Schipper 2001, 19f.) – u.a. beteiligt: Verstehen, Aufmerksamkeit, Konzentration, Gedächtnis, Metakognition, Lernstrategien und Wissensrepräsentation (vgl. Schiefele & Heinen 2001, 795). Für das Verständnis der mathematischen Entwicklung und relevanter Beeinflussungsfaktoren sind dabei Verhältnis von und Wechselwirkungen zwischen Verfügbarkeit angeborenen bereichsspezifischen Kernwissens und dem Erwerb, also dem Erlernen kulturell determinierter mathematischer Konzepte und numerischer Prozeduren wesentlich. Diese Aspekte und deren Verhältnis zueinander werden aus unterschiedlichen theoretischen Blickwinkeln betrachtet: Aus neuropsychologischer Perspektive wird der Frage nach mathematikrelevanten Teilleistungen und spezifischen Zahlenverarbeitungsprozessen nachzugehen sein. Unter entwicklungspsychologischen Aspekten werden „Veränderungen und Stabilitäten" (Montada 2002a, 3) mathematischer Kompetenzentwicklung ab Geburt dargestellt. Dabei werden soziokulturelle und individuelle Faktoren einbezogen, es wird also eine öko-systemische Perspektive eingenommen. Aus Sicht der Kognitionspsychologie ist die Frage nach Lernprozessen als Informationsverarbeitung bzw. als Wissenskonstruktion von Bedeutung (vgl. Seel 2000, 18f.).

Unabhängig von unterschiedlichen Positionen zur Erklärung von Erwerb und Elaboration mathematischer Kompetenzen wird heute grundsätzlich von einem aktiven, konstruktiven, sozial-interaktiven und in hohem Maße individuellen Lernprozess ausgegangen, an dem verschiedene äußere und innere Faktoren beteiligt sind und der durch unterschiedliche individuelle Voraussetzungen und Vorkenntnisse ‚gefiltert' wird. Ein solcher konstruktivistischer Kern steckt nach Resnick in den meisten aktuellen Forschungsansätzen:

> „Despite their diverse training and affiliation, there is broad agreement among these various research groups on what can be termed a *constructivist* assumption about how mathematics is learned. It is assumed that mathematical knowledge – like all knowledge – is not directly absorbed but is constructed by each individual." (Resnick 1989, 162; Hervorh. i. Original).

In diesem Sinne sind die nachfolgenden Ausführungen als Beschreibungen einer ‚idealtypischen' Entwicklung zu verstehen, die im Hinblick auf ein Individuum um dessen individuelle persönliche und Umweltfaktoren ergänzt werden müssen. Diese Aspekte werden in den folgenden Kapiteln noch stärker in den Vordergrund treten.

1.2 Zahlverständnis und Zahlbegriff

Für ein umfassendes Verständnis der Zahlbegriffsentwicklung ist die Klärung des Konstruktes ‚Zahlbegriff' mit all seinen Aspekten notwendige Voraussetzung. Unter dem Terminus ‚Zahlbegriff' wird ein ganzes Set unterschiedlicher Zahlaspekte gefasst, so dass dieser Begriff im Folgenden immer als Sammelbegriff für verschiedene Zahlbegriffskomponenten zu verstehen ist.

Zahlen setzen sich aus unterschiedlichen Aspekten zusammen, denen je eigene Bedeutungen zukommen: Der **Kardinalzahlaspekt** bezieht sich auf die Mächtigkeit einer Menge. Die Kardinalzahl gibt also die gesamte Anzahl der Elemente einer Menge an. Die in der Mathematikdidaktik übliche Auffassung des **Ordinalzahlaspektes** umfasst die zwei unterschiedlichen Bedeutungsaspekte ‚Zählzahl' und ‚Ordnungszahl'. Eine Trennung dieser beiden Aspekte ist für ein differenziertes Verständnis des Erwerbs der Zahlwortfolge von wesentlicher Bedeutung (vgl. dazu ausführlich 1.4): In einem Zählkontext werden Zahlworte Objekten einer zu zählenden Menge zugeordnet, in einem ordinalen Kontext bezeichnet das Zahlwort die Position eines Zählobjektes innerhalb einer geordneten Reihe aller Elemente. Zahlen lassen sich darüber hinaus als **Maßzahlen** für Größen in Relation zur jeweils gewählten Einheit (z.B. 5 Liter oder 2 Stunden) verwenden. Entscheidend dabei ist, dass sie unabhängig von der gewählten Größeneinheit auch grundsätzlich in einem relationalen Sinn gebraucht werden, bei dem sie als **Relationalzahlen** Abstände flexibel innerhalb der Zahlreihe darstellen (vgl. dazu ausführlich 1.4.3.2 und Abb. 1.20). Weitere Zahlaspekte sind der **Codierungsaspekt** für Objekte (z.B. Telefonnummern), der **Operatoraspekt** (z.B. etwas dreimal bestellen) und der **Rechenzahlaspekt** (Rechnen mit Ziffern). Besonders wichtig hinsichtlich der frühen Entwicklung erscheint als weiterer Bedeutungsaspekt des Zahlbegriffs die **Sequenz** im Sinne einer Verfügbarkeit der Zahlwort**reihe**: „In a sequence context, number words occur in their conventional sequence and no external entities are referred to by the users of such words." (Fuson & Hall 1983, 50). Damit ist eine bedeutsame, häufig vernachlässigte Unterscheidung zwischen dem Aufsagen der korrekten Zahlwortreihe *ohne* Zählbedeutung („sequence words") und dem eigentlichen Zählen, dem Gebrauch der Zahlwortreihe *mit* Zählbedeutung (Objekte zählen: „counting words") getroffen worden. Auf diese unterschiedlichen Bedeutungsaspekte des Zahlwortreihengebrauchs und auf die entsprechenden Entwicklungsmodelle dazu wird unten im Rahmen der Ausführungen zur Zählentwicklung ausführlich eingegangen (vgl. 1.4).

Die unterschiedlichen Zahlbedeutungen werden vermutlich zunächst unabhängig voneinander in spezifischen Kontexten erworben. Für das erste Mathematiklernen sind sequenzielle, Zähl- und Kardinalaspekte wesentlich. Diese Aspekte des Zahlverständnisses basieren auf unterschiedlichen, genetisch vorbereiteten kognitiven Schemata (vgl. 1.4.1), sie sind also zumindest rudimentär angelegt und müssen während der vorschulischen und schulischen Entwicklung ausgebaut und miteinander verbunden werden.

Der Prozess der Zahlbegriffsentwicklung verläuft daher nicht linear, sondern eher in Wellenbewegungen und wird durch die vielfältigen zu erwerbenden und zueinander in Beziehung zu setzenden Bedeutungsdimensionen des Zahlbegriffs hochkomplex. Zudem kann sich die Zahlbegriffsentwicklung zunächst auf einen sehr kleinen Zahlenraum beschränken (z. B. zunächst die Zahlen bzw. Mengen 1 bis 3), innerhalb dessen die Entwicklungskomponenten ausgebaut werden. Das bedeutet, dass Kinder in kleinen Zahlenräumen bestimmte Entwicklungsfortschritte aufweisen, diese jedoch noch nicht auf größere Zahlen anwenden können. Fuson spricht bezüglich des Erwerbs der Zahlwortreihe beispielsweise von „developmental levels“ (Fuson 1992a, 60; s.u.). Die Kompetenzen erweitern sich also vergleichbar dem Sprach- oder Schriftspracherwerb allmählich, wobei neue Zahlenräume und strukturelle Einsichten zunächst instabil sind und sich erst allmählich festigen. Auch die Koordination unterschiedlicher Entwicklungsstränge erfolgt sukzessive bzw. beginnt an einzelnen Punkten und wird allmählich ausgeweitet. Kognitive Entwicklung lässt sich also nicht einfach als ein Erreichen bestimmter Stufen erklären (vgl. Wember 1986):

> „Changes in children´s thinking seem typically to involve not the replacement of one way of thinking by another but rather by a gradual ebbing an flowing of multiple ways of thinking, with new approaches being introduced and old ones ceasing to be used as well“ (Siegler 1997, 326).

In diesem Sinne hinterfragt auch Bauersfeld Piagets Modell der Entstehung des Zahlbegriffs und stellt die Frage,

> „ob die bei Piaget genannten ‚Prinzipien’ und Bedingungen der Genese des Zahlbegriffs sämtlich wirklich als abstrakte Voraussetzungen und vollständig verfügbar sein müssen, ehe vom Vorhandensein eines Zahlbegriffs gesprochen und sinnvoll gerechnet werden kann. Selbst viele Erwachsene verfügen nach den strengen Kriterien bestenfalls über einen ‚Proto’-Zahlbegriff. Vielleicht sollte man […] die Piaget-Bedingungen eher als Voraussetzung eines *idealen* Zahlbegriffs behandeln, wobei es auf dem langen Weg dahin viele Zwischenstadien gibt, die bereits ein effektives und intelligentes Rechnen ermöglichen.“ (Bauersfeld 2003b, 445; Hervorhebungen i. Orig.).

Unabhängig davon, welche Entwicklungsreihenfolge angenommen oder welchem Zahlaspekt mehr Bedeutung beigemessen wird, erfordert ein umfassendes Zahlverständnis grundsätzlich sowohl die Verfügbarkeit über die Zahlwortreihe und über Ordnungsvorstellungen als auch über Mengenvorstellungen. Die vollständige Integration aller Teilaspekte zu einem umfassenden Zahlbegriff erfolgt erst im Verlauf der Schulzeit (Radatz & Schipper 1983, 49).

Neben Art und Gewichtung solcher mathematikdidaktisch geprägten Bedeutungsdimensionen von Zahlen kann auch nach der Art deren mentaler Repräsentation gefragt werden. Zahlen können unterschiedlich als Zahlworte, Ziffern, Punktmuster etc. dargestellt sein; dies sind unterschiedliche Oberflächenrepräsentationen vom Gegenstand ‚Zahl'. Vorberg & Blankenberger stellen hier die Frage:

> „Entsprechen verschiedenen ‚Oberflächen'-Repräsentationen auch unterschiedliche mentale Repräsentationen, oder sind Zahlen abstrakt, d.h., liegt ihnen eine einheitliche Repräsentation zugrunde'?" (Vorberg & Blankenberger 1993, 99)

Der Annahme einheitlicher Zahlrepräsentationen widersprechen neuere Untersuchungen (vgl. ebd.). Bezüglich des erfolgreichen Mathematiklernens stellt sich dann die Frage, „ob verschieden dargestellte Zahlen stets in eine einheitliche mentale Repräsentation überführt werden *müssen*, bevor Rechenoperationen auf sie angewandt werden." (ebd.; Hervorheb. i. Orig.) Zur Beantwortung dieser Frage untersuchten die Autoren den zeitlichen Aufwand bei „einfachen Rechenaufgaben" und „Wechselwirkungen der Zahldarstellung mit anderen Variablen" (ebd.). Aufgrund ihrer Untersuchungsergebnisse kommen sie zu dem Schluss, dass in Abhängigkeit von Situation und Zahldarstellung unterschiedliche mentale Repräsentationen aktiviert werden (vgl. ebd., 111f.): Der Zeitbedarf für die Durchführung einer Rechenoperation hängt vom Darstellungsmodus der ‚beteiligten' Zahlen ab, so dass also zwischen Zahldarstellung und Rechenoperation Wechselwirkungen bestehen. Auch die Zahlwerte scheinen Einfluss auf Bearbeitungszeiten zu haben: Bei Größenvergleichen und Addition beeinflussen sich Zahldarstellung und Zahlgröße, dabei hängt die Ausprägung von Distanzeffekt (Größenvergleiche lassen sich umso schneller durchführen, je größer die Distanz zwischen den Vergleichszahlen ist) und von Größeneffekt (Einfluss der Werte der Summanden bzw. der Summe) von der Zahldarstellung ab.

Damit kann festgehalten werden, dass Repräsentationen und Rechenprozesse darstellungsspezifisch sind: „Die Vorstellung, daß einstelligen Zahlen in verschiedener Darstellung nur eine Repräsentation zugrunde liegt, die bei jeder Operation aktiviert wird, ist falsch." (ebd., 112). Ob für bestimmte Darstellungen jeweils spezifische mentale Zahlrepräsentationen oder ob parallel mehrere Repräsentationen von Zahlen existieren – wobei in letzterem Fall eine Variante von einer gemeinsamen, ‚tieferen' und zusätzlichen ‚oberflächennahen' Zahlrepräsentationen denkbar wäre – ist unklar (vgl. ebd.).

Ausgehend von der Annahme einer Mehrfach-Repräsentation erscheint es verständlicher, wenn Kinder ‚plötzlich' Schwierigkeiten mit ‚eigentlich' vertrautem Stoff bekommen, sobald eine für sie schwierigere Darstellungsform gewählt wird. Kinder müssten also für erfolgreiches Mathematiklernen über eine breite ‚Zugriffsfläche' vielfältig verfügbarer Repräsentationen zu zentralen Vorstellungsbildern verfügen. Für eine Mehrfach-Repräsentation von Zahlen spricht u.a. auch das Modell vernetzter Hirnmodule von Dehaene (1992, 1999; vgl. 1.4.1).

1.3 Erwerb mathematischer Kompetenz: Empirische Befunde zu Fähigkeiten im Säuglingsalter

Wie entsteht nun aber Zahlvorstellung und elaboriertes Zahlenwissen? Anders gefragt: Worauf gründet sich die erste Entwicklung des Zahlverständnisses, wie entwickeln sich die einzelnen Zahlaspekte und welche Gewichtung kommt ihnen im Einzelnen zu? Von Interesse für die Entwicklung mathematischer Kompetenz sind also auch die genetischen Grundlagen bzw. die sehr frühen Kompetenzen, welche die Basis dieser schon elaborierteren Konzepte darstellen. Der Aufbau von Wissen erfordert grundsätzlich zunächst die Existenz von Anknüpfungspunkten, an denen neue Kenntnisse an- bzw. aufgebaut und denen sie zugeordnet werden können. Sonst bleibt Lernen begriffslos und isoliert: „Man sieht nur, was man weiß." (Gerster & Schultz 2000, 29). Über welche Anknüpfungspunkte für den Aufbau mathematischen Wissens verfügt aber der Mensch genau?

Im Gegensatz zu früheren Annahmen kommen Säuglinge keineswegs völlig unvorbereitet auf die Welt, sondern verfügen über genetisches, bereichsspezifisches Grundwissen, ohne dass sie es aus Wechselwirkungen mit ihrer Umwelt hätten herleiten müssen (Dehaene 1999, 62). Heute wird davon ausgegangen, dass komplexe Fähigkeiten wie beispielsweise das Lernen von Sprache ebenso wie die Verarbeitung von Informationen aus der Umwelt bereits genetisch vorbereitet sind. Ebenso werden auch für den mathematischen Wissenserwerb z.T. genetisch vorbereitete, und damit von der Sprachentwicklung zunächst unabhägige Module angenommen, welche den Säugling auf Erfahrungen u.a. mit Quantitäten vorbereiten. Extrem-Positionen gelten als überholt, so dass nach den jeweiligen *Anteilen* angeborener und erworbener Aspekte zu fragen bleibt (vgl. Resnick 1994, 479): Kognitive Entwicklung findet immer statt, indem vorbereitete, angelegte kognitive Strukturen oder Schemata bei der Auseinandersetzung mit der Umwelt aktiviert werden. Dabei treten kognitive Schemata und Umwelteinflüsse in eine Wechselwirkung zueinander derart, dass die angelegten Strukturen das Handeln in Situationen steuern, die situativen äußeren Bedingungen ihrerseits wiederum Einfluss nehmen auf die internen Strukturen und diese modifizieren oder verändern.

Angeborene ‚Anknüpfungspunkte' werden für den Bereich mathematischen Wissen z.T. auch als Zahlensinn bezeichnet, einer intuitiven numerischen Fähigkeit, Anzahlen und deren Beziehungen wahrnehmen und verstehen zu können. Bereits 1954 spricht Dantzig von einem generellen Zahlensinn, schreibt diesem aber äußerst begrenzte numerische Fähigkeiten zu (vgl. Dantzig 1954, 1; zit. nach Simon 1997, 351). Auch Greeno (1991, 170) versucht eine Fassung des Begriffes ‚number sense' und charakterisiert Zahlensinn als Form kognitiver Expertise. Er bezieht sich dabei hauptsächlich auf elaborierte, komplexe numerische und arithmetische Fähigkeiten schon während der Schulzeit und beschreibt Menschen *mit* Zahlensinn folgendermaßen:

> „People with number sense know where they are in the environment, which things are nearby, which things are easy to reach from where they are, and how routes can be combined flexibly to reach other places efficiently. They also know how to transform the things in the environment to form other things by combinations, separations, and other operations." (ebd., 185).

Dies würde implizieren, dass es auch Menschen *ohne* Zahlensinn geben muss. Dieser Annahme widersprechen jedoch z. B. die Untersuchungen von Ezawa (1992, insbes. 2002), die intuitives Zahlen- und Mengenwissen sogar Kindern mit leichter geistiger Behinderung zuspricht (vgl. 3.2).

Im Gegensatz zu Greenos Ausführungen zu elaborierteren Formen von Zahlensinn untersucht Dehaene (1999, 2001) die ganz *frühen* Anzeichen für Zahlensinn und dessen genetische Grundlage: Er nimmt an, dass

> „das menschliche Gehirn mit einem angeborenen Mechanismus für das Erfassen numerischer Größen ausgestattet [ist], der im Lauf der Evolution erworben wurde und uns zur Aneignung der Mathematik befähigt. Damit dieses protonumerische Modul das Erlernen von Zahlwörtern beeinflussen kann, muß es an seinem Platz sein, bevor die Zeit des außerordentlichen Sprachwachstums beginnt […]. Demnach sollten Babys also schon im ersten Lebensjahr einige Aspekte der Arithmetik verstehen.“ (Dehaene 1999, 54).

Zahlensinn bedeutet nach Dehaene (2001) eine domänenspezifische, biologisch bedingte Fähigkeit, deren Existenz er auf vier belegte Befunde gründet: Dem Vorhandensein evolutionärer Arithmetik-Vorläufer in Tieren (vgl. Church & Meck 1984), der sehr frühen Entwicklung arithmetischer Kompetenzen im Säuglingsalter unabhängig von anderen Fähigkeiten (vgl. dazu unten u.a. Wynn 1992, 1995), den Übereinstimmungen numerischer Berechnungsprozesse bei Tieren, Säuglingen und Erwachsenen (z.B. Abstandseffekte: Zahlenunterscheidung wird einfacher, wenn der Abstand zwischen beiden Zahlen groß ist, sie wird schwieriger, wenn Abstände klein sind; vgl. dazu unten u.a. Starkey & Cooper 1980; Xu & Spelke 2000) sowie der Existenz zugehöriger zerebraler Grundlagen. Die Annahme zerebraler Korrelate mathematischen Kernwisses stützt Dehaene (2001, 22) auf folgende zwei Argumente: Zum einen lassen neuropsychologische Untersuchungen an Patienten mit Hirnläsionen vermuten, dass gewisse Hirnschädigungen selektive Beeinträchtigungen interner quantitativer Repräsentationen bewirken können. Zum anderen scheinen bestimmte Hirnregionen während der Bearbeitung spezifisch numerischer Anforderungen aktiviert zu werden. Damit wäre die Grundlage mathematischen Verständnisses genetisch festgelegt. Dabei wird nicht von *einem* spezifischen mathematischen Hirnbereich zur Kodierung des gesamten mathematischen Wissens ausgegangen, sondern von multiplen Hirnarealen, die an zerebraler Zahlenverarbeitung beteiligt sind (vgl. Dehaene 1992; 1999; 2001; vgl. 1.4.1).

Dehaenes Hauptthese ist die Annahme eines angeborenen, domänenspezifischen Konzeptes zu *ungefährer Mengen*repräsentation. Danach würden Säuglinge Mengen zunächst nur als kontinuierliche Größen wahrnehmen können. Die Auseinandersetzung mit Mengen kann jedoch auf zwei grundsätzlich unterschiedlichen Arten der Mengenwahrnehmung beruhen: Mengen können als kontinuierliche, physikalisch erklärbare Ausdehnung oder als aus diskreten, voneinander unterscheidbaren Einheiten zusammengesetzt wahrgenommen werden. Ob Säuglinge neben der Fähigkeit zu kontinuierlicher auch über die Fähigkeit zu diskreter Mengenwahrnehmung und -unterscheidung verfügen, wird kontrovers diskutiert. Die Art der Wahrnehmung ist jedoch ausschlaggebend für den numerischen Gehalt der beobachteten Kompetenzen. So ist eine diskrete Anzahlwahrnehmung beispielsweise Voraussetzung für die Entwicklung von Zählfertigkeiten und für eine exakte Bestimmung von Mengen und Mengenveränderungen. Auch die Frage, ob und wie Säuglinge Mengen vergleichen und Veränderungen beurteilen wird unterschiedlich beantwortet und eingeordnet. Anhand ausgewählter Studien soll nachfolgend daher geklärt werden, auf welche Weise Säuglinge Quantitäten und deren Veränderungen wahrnehmen.

In den Untersuchungen wurde im Wesentlichen auf zwei Methoden zurückgegriffen: Habituierungs- und Transformationsstudien. Habituierungsstudien beruhen auf der Tatsache, dass bereits Säuglinge ihre Aufmerksamkeit bevorzugt neuen, unbekannten Dingen zuwenden. Bei diesem Verfahren gewöhnt (habituiert) man darum die Kinder an bestimmte Anzahlrepräsentationen und zeigt dann eine neue, abweichende Anzahlrepräsentation. Während des Versuchs wird die Blickzeit der Säuglinge gemessen. Ein Anstieg der Fixationszeit bei neuen Repräsentationen wird als Diskriminationsfähigkeit zwischen unterschiedlichen Anzahlen interpretiert. Das Verfahren der Transformationsstudien beruht auf dem Prinzip der Verletzung von Erwartungen (violation-of-expectation): Dabei werden den Kindern einfache Rechenoperationen präsentiert, die entweder zu arithmetisch bzw. physikalisch möglichen oder nicht möglichen Ergebnissen führen. Längere Fixationszeiten bei unmöglichen Ergebnissen werden als Beleg für die Verletzung der korrekten Annahme und damit für korrektes arithmetisches bzw. physikalisches Verständnis interpretiert. Im Folgenden werden Untersuchungen beider Methodenvarianten einbezogen.

1.3.1 Mengenwahrnehmung und -unterscheidung

In zahlreichen Studien wurden Ursprung, Art und Bedeutung elementarer Objekt- und Mengenrepräsentation und Mengenunterscheidung im Säuglingsalter untersucht. Dabei geht es hier um sehr grundlegende Fragen: Auf welche Weise werden Objekte, Laute und Ereignisse repräsentiert und quantitativ erfasst – kontinuierlich oder diskret? Wie werden Mengen in diskrete Einheiten unterscheidbar – perzeptuell, durch raum-zeitliche Bezüge, beschaffenheits- oder gattungsspezifisch? Sind die beobachteten Fähigkeiten grundsätzlich numerisch oder physikalisch basiert?

Im Zentrum dieser Problemstellungen müssen zunächst Fragen zu Ursprung, Art und Funktionsweise von **Objektkonzepten** stehen: Um Mengen wahrnehmen zu können, müssen grundsätzlich Objekte repräsentiert werden können. Die Art dieser **Objektrepräsentation** ist entscheidend, um klären zu können, ob Mengen diskret oder kontinuierlich wahrgenommen werden. Zur Erklärung der Art von Objektrepräsentation sollen Befunde zu Objektpermanenz und raum-zeitlichen Informationen herangezogen und miteinander verbunden werden:

Entgegen Piagets Annahmen wurde in verschiedenen Studien die Säuglingen abgesprochene Fähigkeit zu **Objektpermanenz** belegt (Objektpermanenz als Wissen, dass Objekte unabhängig von der eigenen Wahrnehmung existieren). Baillargeon (1993) hat eine Vielzahl eigener Befunde zusammengefasst und gezeigt, dass Säuglinge im Alter von 3½ bis 5½ Monaten Prinzipien der Objektpermanenz verstehen können: Sie sind danach in der Lage, nachzuvollziehen, dass (a) Objekte weiter existieren, auch wenn sie aus dem Sichtfeld verschwinden (verdeckt werden), (b) Objekte trotz Verdecktseins ihre physikalisch-räumlichen Eigenschaften kontinuierlich beibehalten und (c) physikalischen Gesetzmäßigkeiten unverändert unterliegen (vgl. Baillargeon 1993, 265f., 308).

In diesen Untersuchungen waren die Kinder in der Lage, ein bis drei verdeckte Objekte unter Berücksichtigung der drei genannten Prinzipien zu repräsentieren. Dabei bezogen sie sich zum einen auf das Objekt als ‚Einzelheit' und zum anderen auf seine physikalische Beschaffenheit. Aktuelle Untersuchungen von Hespos & Baillargeon (2001) konnten Objektpermanenz sogar in einem noch jüngeren Alter von 2½ Monaten nachweisen. Spelke et al. (1995) sowie Wynn (1992) untersuchten die Relation zwischen Objektpermanenz und dem Verwenden **räumlich-zeitlicher Informationen** und deren Nutzen für **diskrete Objektrepräsentation**: Spelke et al. (1995) zeigten, dass die Kinder räumlich-zeitliche Unstimmigkeiten als Beweis für zwei numerisch eigenständige, unterscheidbare Objekte ansahen. Kontinuitäten und Diskontinuitäten der Bewegung von Objekten wurden als Informationsquelle genutzt, so dass die Autoren davon ausgehen, dass Kontinuität sehr früh als ein Kernprinzip unter weiteren zur Objektindividuation entwickelt wird (vgl. auch in 1.3.2 Wynn 1992). Carey & Xu (2001) schließen aus den Befunden von Spelke et al. (1995) und von Wynn (1992):

> „These results suggest that (1) infants represent objects as continuing to exist when they are invisible behind barriers, (2) infants distinguish one object from two numerically distinct but featurally identical objects, distinguishing *one object* from *one object and another object*, and (3) the information infants draw upon for object individuation and for establishing numerical identity is spatiotemporal." (Carey & Xu 2001, 185; Hervorheb. i. Orig.).

Diskrete Objektrepräsentation wird danach also gesteuert durch Wahrnehmung und Auswertung von Information über physikalische, raum-zeitliche Merkmale. Säuglinge können dadurch Objekte als eigenständige, diskrete Einheiten zeitüberdauernd repräsentieren und auch zeitlich versetzt miteinander vergleichen (zumindest nach gleich/ungleich-Kriterien). Allerdings bleiben diese beobachteten Fähigkeiten auf kleine Anzahlen bis drei begrenzt. Die Studien von Spelke et al. (1995) und Wynn (1992) zeigen also, dass Kinder raum-zeitliche Kontinuitäten zur Repräsentation diskreter Objektrepräsentation und damit eventuell zur Feststellung numerischer Identität nutzen.

Zur Klärung der offenen Frage, ob Säuglinge ebenso Unterschiede der Objektmerkmale oder Gattungsunterschiede zu diskreter Objektrepräsentation nutzen können und welcher Zugang dominant ist, führten Xu & Carey (1996) weitere Expeimente durch. Sie konnten nachweisen, dass Merkmals- oder Gattungsunterschiede allein keine neue Objektrepräsentation hervorrufen, sondern raum-zeitliche Informationen Vorrang gegenüber anderen Merkmalen der Objekte wie Farbe, Größe oder Form haben (vgl. Xu & Carey 1996; s. auch Carey & Xu 2001, 186ff.). Im Versuchsafbau wurde eine große Sichtblende verwendet, hinter der zunächst ein Objekt (z. B. ein Spielzeuglaster) zum Vorschein kommt und wieder dahinter verschwindet; anschließend kommt auf der anderen Seite des Sichtschutzes ein anderes Objekt (z.B. eine Spielzeugente) zum Vorschein und verschwindet ebenfalls wieder dahinter (vgl. Abb. 1.1). Wird der Sichtschutz entfernt, erwarten Erwachsene selbstverständlich zwei Objekte dahinter: einen Laster und eine Ente. Da im Gegensatz zu anderen Versuchen von Xu & Carey (1996) mit *zwei* Sichtblenden hier nur *ein* durchgehender Sichtschutz verwendet wurde, fehlt hier ein eindeutiger raum-zeitlicher Bezugsrahmen. Daher kann diese Aufgabenstellung nur unter Rückgriff auf andere Objektmerkmale bzw. Gattungsunterschiede gelöst werden. Interessanterweise waren die getesteten Säuglinge hier nicht wie erwartet in der Lage, ausgehend von Unterschieden bei Objektmerkmalen und der Gattung die richtige Folgerung zu ziehen, dass zwei Objekte hinter dem Sichtschutz sein müssten, sondern erwarteten nur eins (vgl. Xu & Carey 1996, 125f.). Wurden jedoch statt einer großen Sichtblende zwei Blenden verwendet, hinter denen jeweils ein Objekt erschien bzw. verschwand, waren 10 Monate alte Säuglinge in der Lage, Prinzipien der Objektpermanenz zu verstehen und die räumlich-zeitlichen Bezüge durch die zwei Sichtblenden zu nutzen, um feststellen zu können, wie viele einzelne Objekte beteiligt sind. 10 Monate alte Säuglinge nutzen also lediglich raum-zeitliche Merkmale zur diskreten Objektrepräsentation. Bereits 12 Monate alte Säuglinge konnten allerdings spezifischere Merkmale nutzen und obige Aufgabenstellung lösen (vgl. ebd.). 10 Monate alte Säuglinge waren dazu nur unter der Bedingung in der Lage, dass zu Beginn *beide* Objekte *gleichzeitig* gezeigt wurden, bevor die bekannte Prozedur durchgeführt wurde.

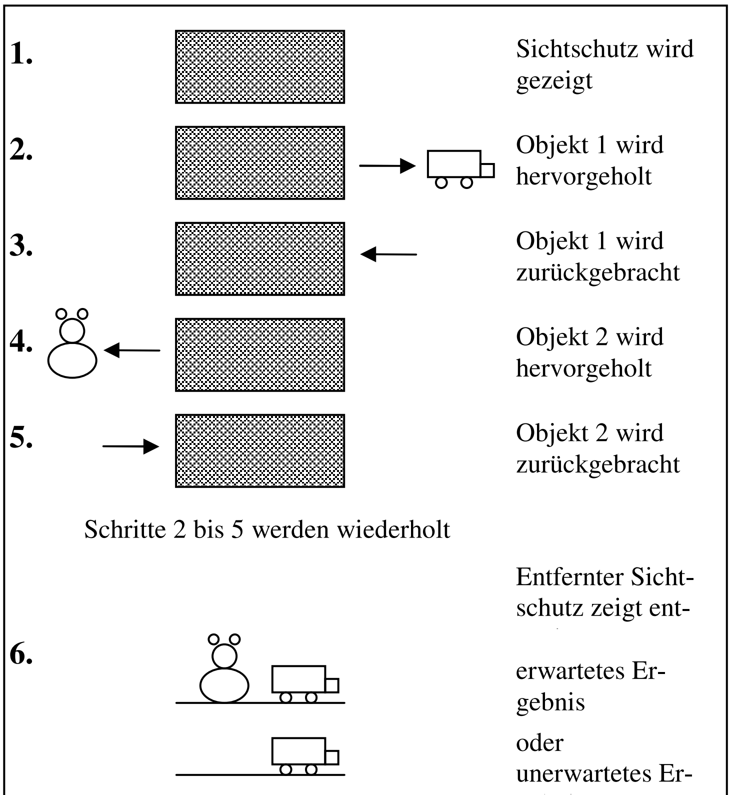


Abbildung 1.1: Versuchsdesign nach Xu & Carey (1996, 125)

Ob Säuglinge Objekte aufgrund spezifischer Merkmale oder aufgrund deren Gattungszugehörigkeit in *statischen* Anordnungen ohne Unterstützung durch Bewegung unterscheiden, also als diskrete Objekte repräsentieren können, wurde in anderen Experimenten untersucht (u.a. Xu et al. 1999, Needham 1998): Carey & Xu (2001) und Needham & Baillargeon (2000) diskutieren diese und weitere solcher Studien ausführlich. Da diese beiden Autorengruppen zu gegensätzlichen Befunden kommen, sollen exemplarisch der Versuchsaufbau von Xu et al. (1999) nach Carey & Xu (2001) und von Needham (1998) nach Needham & Baillargeon (2000) vorgestellt und die möglichen Schlussfolgerungen zusammengeführt werden:

In beiden Experimenten geht es um die Unterscheidung von zwei in Form, Farbe und Art unterschiedlichen Objekten in zwei voneinander getrennte Einzelobjekte. Allerdings stoßen die Objektgrenzen partiell aneinander.

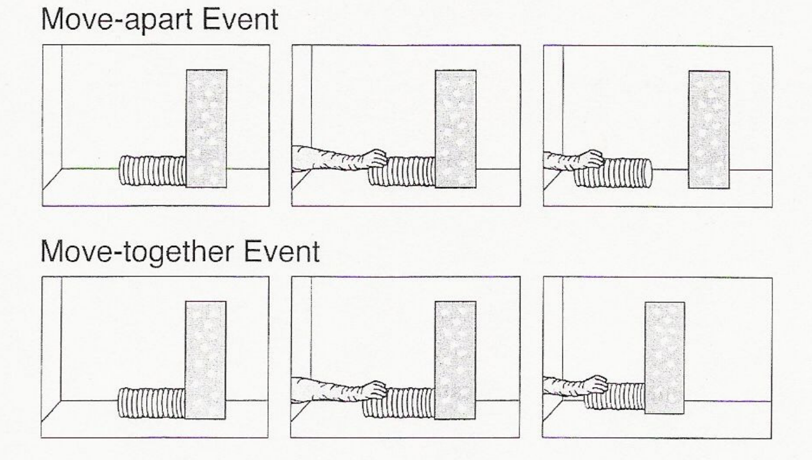


Fig. 2. Move-apart and move-together test events featuring the cylinder-and-box display in Needham (1998).

Abbildung 1.2: Versuchsdesign von Needham (1998) (entnommen aus Needham & Baillargeon 2000, 281)

In dem Experiment von Needham (1998; vgl. Abb. 1.2) wurde eine Anordnung aus einer großen, hochkant stehenden blauen Box und einem gelben Schlauch vorgegeben. Anschließend wurde ein Objekt ergriffen und weggezogen. Dabei gab es zwei unterschiedliche Ergebnisse: Entweder bewegte sich nur das ergriffene Objekt („Move-apart Event") oder beide Objekte bewegten sich als Einheit („Move-together Event"). Die getesteten Säuglinge im Alter von 4½ bis 6½ Monaten schauten signifikant länger auf die physikalisch unwahrscheinlichen „Move-together Events". Säuglinge können also angrenzende Objekte durch Beachtung von physikalischen Gesetzmäßigkeiten, von Erfahrungen und von Merkmals- und Art-Unterschieden voneinander unterscheiden (vgl. Needham & Baillargeon 2000, 281).

In einem ähnlichen Experiment von Xu et al. (1999) wurde als Stimulus u.a. eine Anordnung bestehend aus einem Auto mit darauf sitzender Ente gewählt (vgl. Abb. 1.3): Xu et al. (1999) habituierten 10 und 12 Monate alte Säuglinge auf diese Anordnung und verfuhren dann ähnlich wie Needham (1998). Allerdings schauten die 10 Monate alten Säuglinge hier *nicht* signifikant länger auf die physikalisch unwahrscheinliche gemeinsame Bewegung beider Objekte, obwohl nur das obere Objekt angehoben wurde. Sie unterschieden die Objektkomposition also nicht in zwei unterschiedliche Einzelobjekte. Erst im Alter von 12 Monaten wurde auf diese Aufgabenstellungen angemessen reagiert. Bezogen auf die 10 Monate alten Säuglinge stellen diese Befunde einen Widerspruch zu denen von Needham (1998) dar. Nach Xu et al. (1999) und Carey & Xu (2001) können Säuglinge unter 12 Monaten keine gattungsspezifische Information nutzen, um aneinandergrenzende Objekte als Einzelheiten identifizieren zu können.

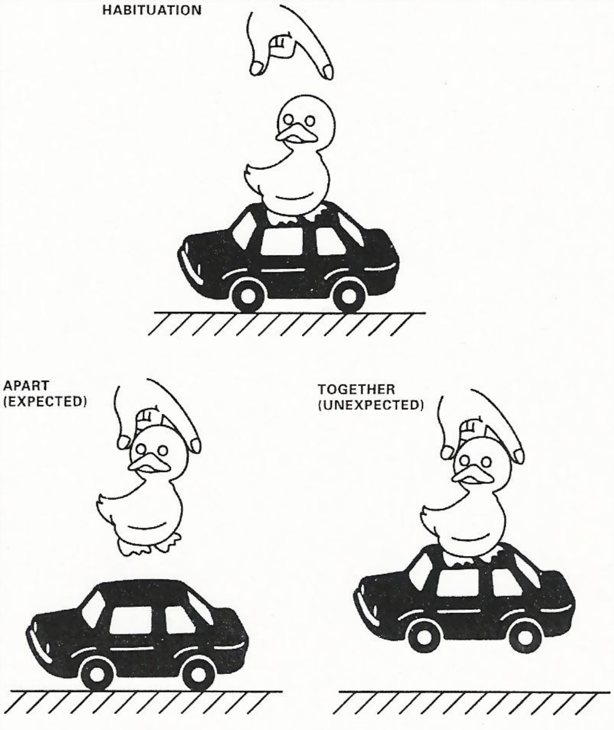


Fig. 4. Schematic representation of experimental paradigm from Xu et al. (1999).

Abbildung 1.3: Versuchsdesign von Xu et al. (1999) (entnommen aus Carey & Xu 2001, 195)

Needham & Baillargeon (2000, 281) nehmen an, dass Säuglinge durchaus Wissen über äußere Beschaffenheiten und physikalische Gesetzmäßigkeiten haben sowie über eigene Erfahrungen mit vertrauten Merkmalsausprägungen verfügen und dies für eine Abgrenzung von einzelnen Objekten einsetzen können. Einschränkungen – und damit Erklärungen für die uneinheitlichen Befunde – können sich zum einen durch den Komplexitätsgrad und zum anderen durch die Anordnung ergeben: Sind Objekte in ihrem Erscheinungsbild zu komplex, können diese Informationsfülle nicht ausreichend kodiert und die mentalen Repräsentationen nicht miteinander verglichen werden. So sind aufeinander gestapelte Objektkompositionen vermutlich schwieriger zu analysieren als seitlich aneinander angrenzende oder als teilweise verdeckte Ereignisse (vgl. ebd.).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Objektrepräsentation auf drei unterschiedliche Arten ablaufen kann (vgl. Xu & Carey 2000, 292ff.): (1) Auf perzeptueller Ebene z.B. durch Figur/Grund-Differenzierung (Objekt-Beschaffenheit), (2) als aufmerksamkeitsgesteuerter Mechanismus durch Ausnutzen raum-zeitlicher Eigenschaften: Lokalisation, Bewegungsverlauf, (3) auf einem konzeptuellen Kategorien- bzw. Klassenlevel durch Verwendung von sortierenden Begriffen wie ‚Hund', ‚Katze' etc., also durch Interpretieren einer Einheit als zugehörig zu einer bestimmten Klasse. Xu & Carey (2000) unterscheiden daher grundsätzlich in konzeptuelle und in perzeptuelle Kategorien und gehen davon aus, dass konzeptuelle, gattungsspezifische Repräsentationen später entwickelt werden, jedoch tragfähiger und weitreichender sind:

> „[…] we suggest that kind representations are required for object individuation under many circumstances, including when featural information is ambiguous, when spatiotemporal information is strong and needs to be overridden, and when the short-term memory demands of the task are high.“ (ebd., 293).

Echte konzeptuelle, artspezifische Objektrepräsentation entsteht den Autoren zufolge erst gegen Ende des ersten Lebensjahres. Diese Befunde stellen allerdings eine gravierende Revision früherer Annahmen dar, denen zufolge erst im Alter von über 10 Jahren abstrakte Oberbegriffe möglich werden. Ob solches begriffliche Wissen angeboren oder im Verlauf des ersten Lebensjahres erworben wird, ist unklar, es liegt jedoch unbestritten „spätestens gegen Ende des ersten Lebensjahres den Kategorisierungsleistungen von Säuglingen“ zugrunde (Sodian 2002, 447; vgl. dazu ausführlich 1.5.2).

Neben dieser Frage, wie Objekte repräsentiert werden, ist die Frage nach der Fähigkeit zur Erfassung der *Anzahl* einer Objektmenge wichtig: Es wurde gezeigt, dass Säuglinge Objekte durchaus individuieren können, es stellt sich jedoch die Frage, ob sie auch das abstrakte Merkmal **‚Anzahl'** einer Menge wahrnehmen und damit **Mengen anzahlmäßig voneinander unterscheiden** können:

Diverse Säuglingsstudien, in denen nachgewiesen wurde, dass bereits wenige Tage alte Säuglinge kleine Anzahlen erfassen und voneinander unterscheiden können, lassen auf angeborene Grundlagen mathematischen Wissens schließen. Dabei wurden in den Versuchen Kindern bildliche oder auditive Repräsentationen von Anzahlen präsentiert oder Handlungen als Anzahlkodierung vorgeführt, während Richtung und Dauer des Blicks aufgenommen wurden. Auch Kombinationen verschiedener Stimuli wurden eingesetzt. Diese Untersuchungen dienten der Feststellung abstrakter Zahlkonzepte.

Die Fähigkeit zur Unterscheidung von Zahlen bzw. Mengen wurde erstmals von Starkey & Cooper (1980) für mehrere Monate alte Kinder und kurz darauf von Antell & Keating (1983) auch für drei bis vier Tage alte Säuglinge nachgewiesen. Starkey & Cooper (1980) zeigten den Kindern in ihren Habituationsversuchen zunächst wiederholt Dias mit Punktmustern bestehend aus entweder zwei oder drei Punkten. War eine Gewöhnung daran eingetreten, wurde eine neue Menge präsentiert: Den Kindern, denen zuvor immer Zweiermengen präsentiert worden waren, wurde nun eine Dreiermenge vorgelegt und umgekehrt. Auf diesen Wechsel reagierten die Kinder mit einer deutlich höheren Fixationszeit des neuen Stimulus – sie hatten also die Veränderung bemerkt, sie konnten unterscheiden zwischen der Zweier- und der Dreiermenge. Dass diese Befunde tatsächlich auf ein Wahrnehmen der *Anzahl*veränderung in numerischem Sinn hindeuten und sich nicht durch Reaktionen auf andere Oberflächenmerkmale erklären lassen, sollte über entsprechende Variationen von Anordnung und Ausdehnung gewährleistet werden: Anordnungen mit zwei oder mit drei Punkten ließen sich so nicht aufgrund ihrer Ausdehnung, Länge etc. unterscheiden, sondern nur über das Merkmal ‚Anzahl'.

Diese Sensitivität für kleine Anzahlen wurde in weiteren Studien differenziert belegt: Strauss & Curtis führten 1981 mit 10 bis 12 Monate alten Kindern und Starkey et al. führten 1990 mit 6 bis 8 Monate alten Kindern erfolgreich Versuche durch, bei denen nicht homogene Punktmuster, sondern Vorlagen mit heterogenen Objekten verwendet wurden, deren Größe, Anordnung, Farbe und Art nicht konstant waren. In weiteren Versuchen wurde überprüft, ob diese Sensitivität *visuell* präsentierten Anzahlveränderungen gegenüber auch bei anderen Repräsentationsmodi zu finden sein würde und ob Beziehungen zwischen gleichen Anzahlen unterschiedlicher Repräsentation, also ein intermodaler Transfer möglich wären. So zeigten Starkey et al. (1990), dass Kinder von einer Tonfolge auf die Anzahl der Töne schließen und dass sie auditiv und visuell präsentierte Mengen nach ihrer Anzahl korrekt miteinander in Verbindung bringen können. Weitere Experimente mit entsprechenden Variationen zeigten, dass für korrekte Zuordnungen visueller Vorlagen zu passenden Tonfolgen nicht zeitliche Übereinstimmungen (Tempo – Anzahl) ausschlaggebend waren und dass Übereinstimmungen zwischen auditiv und visuell präsentierten Anzahlen auch dann wahrgenommen werden konnten, wenn die Stimuli nicht simultan vorgegeben wurden (vgl. ebd., 115ff.). Damit wären also 6 bis 8 Monate alte Säuglinge in der Lage, numerische Information wahrzunehmen und modalitätsunabhängig Urteile über numerische Äquivalenzen zu fällen.

Wynn (1996) führte weitere Habituierungsversuche durch: Sie untersuchte, ob 6 Monate alte Kinder auch in kontinuierliche Bewegungsabfolgen eingebettete Handlungen nach Gesichtspunkten der Anzahl unterscheiden können. Den Probanden wurden Puppen gezeigt, die Sprünge vollführten. Einige Kinder wurden dabei an zwei Sprünge, andere an drei Sprünge gewöhnt. Nach dieser Habituierungsphase wurde ein neuer Reiz in Form einer abweichenden Sprunganzahl vorgegeben. Dabei wurden Puppen, die bei einer Wiederholung eine abweichende Anzahl Sprünge ausführten deutlich länger fixiert als diejenigen Puppen, die bei Wiederholung die gleiche Anzahl Sprünge wie zuvor machten. Die habituierte Sprunganzahl wurde in der Testphase in Tempo und Gesamtdauer variiert, um die Befunde ausschließlich auf das Merkmal ‚Anzahl' beziehen zu können. Wynn (1995, 38; 1996) folgert aus ihren Befunden, dass die Kinder innerhalb aller Sprungsequenzen die Anzahl der Sprünge wahrgenommen und in gewisser Weise ausgezählt haben müssten. Dazu müssten die Kinder jeden Sprung als eigenständige Einheit wahrgenommen haben. Ähnlich wie Starkey et al. (1990) geht daher auch Wynn (1995, 40) von früher numerischer Kompetenz und abstraktem Zahlkonzept aus. Da die Kinder hier die Handlungssequenzen (Sprungfolgen) ohne weitere stabile korrelierende physikalische Merkmale wahrnehmen, merken, bestimmen und von anderen Sprungfolgen unterscheiden konnten, ist anzunehmen, dass diese Diskriminationsleistungen auf der Basis eines gewissen numerischen Verständnisses erfolgt sind.

Da die bisher referierten Befunde aufgrund unzureichender Kontrolle wahrnehmungsgebundener, kontinuierlicher Merkmale wie Unterschiede in Farbe, Konturenlänge, Anordnung und Ausdehnung etc. häufig nicht als ausreichender Beleg für numerisch basierte Wahrnehmung und Unterscheidung diskreter Mengen angesehen werden, sollen ergänzend aktuellere Studien vorgestellt werden, welche differenzierter untersuchen, inwiefern Säuglinge tatsächlich die *Kardinal*werte kleiner diskreter Objektmengen repräsentieren und voneinander unterscheiden können:

Clearfield & Mix (1999) überprüften die bisherigen Befunde in Bezug auf statische, visuell präsentierte Stimuli in eigenen Untersuchungen, bei denen sie wahrnehmungsgebundene Merkmale kontrollierten. Sie kamen zu dem Schluss, dass Kinder nicht Anzahlen an sich verglichen, sondern dass sie die räumliche Ausdehnung als Vergleichsmaßstab verwendeten: In diesem Versuchsaufbau wurden kontinuierliche Mengen systematisch variiert, um herauszufinden, ob das Verhalten der Kinder auf der Wahrnehmung diskreter oder kontinuierlicher Mengen basiert. Die Autoren wählten als physikalisch wahrnehmbare Variable Konturenlängen (vgl. Abb. 1.4). Unter Konturenlänge ist hier der Gesamtumfang aller Einheiten einer Menge zu verstehen; d.h., vier Quadrate mit einer Seitenlänge von je 2 cm hätten eine Gesamtkonturenlänge von 32 cm. Manipulationen der Konturenlänge basieren also auf Größenveränderungen der Objekte, nicht auf Veränderungen von Abständen.

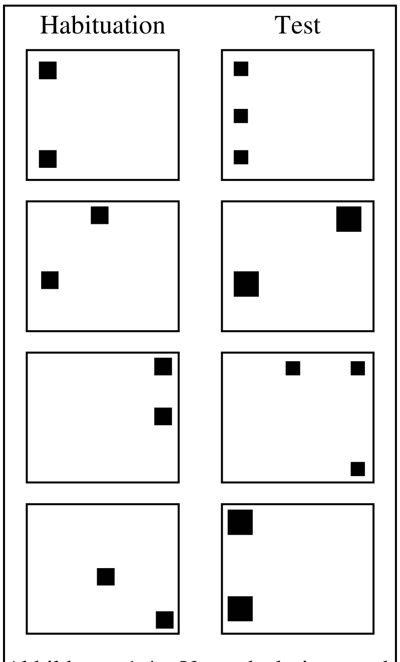


Abbildung 1.4: Versuchsdesign nach Clearfield & Mix (1999, 409)

Clearfield & Mix (1999) habituierten 6 bis 8 Monate alte Säuglinge auf Bilder mit zwei oder mit drei Quadraten und legten ihnen anschließend Testbilder vor, die sich von den Habituationsbildern entweder in der Anzahl der Quadrate, aber nicht in der Konturenlänge oder in der Konturenlänge, aber nicht in der Anzahl unterschieden. Könnten die Kinder wirklich *Anzahl*unterschiede wahrnehmen können, müssten sie beim Testitem ‚veränderte Anzahl / gleiche Konturenlänge' dishabituieren, beim Testitem ‚gleiche Anzahl / veränderte Konturenlänge' dagegen nicht (vgl. ebd., 409). Da die Kinder trotz gleich bleibender Anzahl bei Veränderungen der Konturenlänge dishabituierten, und umgekehrt bei gleich bleibender Gesamtkonturenlänge und veränderter Anzahl nicht dishabituierten, schließen die Autoren, dass Kinder ihre Aufmerksamkeit nicht auf die Anzahl, sondern auf die räumliche Ausdehnung *kontinuierlicher* Mengen richten. Das wäre ein Beleg dafür, dass Kinder keinen numerischen Zahlensinn im Sinne einer Unterscheidung zwischen diskreten Mengen haben, sondern zunächst nur über eine gewisse physikalische Sensitivität gegenüber kontinuierlichen Quantitäten verfügen.

Clearfield & Mix (ebd., 410) stellen jedoch zwei unterschiedliche denkbare Erklärungsalternativen auf: Zum einen können die Befunde derart interpretiert werden, dass Säuglinge einfach noch keine diskreten Anzahlen losgelöst von entsprechenden wahrnehmbaren physischen Merkmalen repräsentieren können. Dies wäre mit nachfolgend dargestellten Befunden von Mix et al. (1996) zu fehlenden Kompetenzen Drei- und Vierjähriger zu intermodalem Anzahlvergleich konform. Zum anderen wäre es möglich, dass Säuglinge zwar zu Anzahlunterscheidungen auf numerischer Basis fähig sind sofern dies notwendig ist, alternative Merkmale wie Konturenlängen jedoch *bevorzugen*.

Die angenommene Fähigkeit auch zu *intermodalen* Anzahlvergleichen bei 6 bis 8 Monate alten Säuglingen (vgl. Starkey et al. 1990; s.o.) wurde von Mix et al. (1996) an Drei- bis Vierjährigen überprüft, wobei die früheren Befunde nicht repliziert werden konnten: Dreijährige hatten noch Schwierigkeiten, erst Vierjährige konnten die Aufgaben etwas besser bewältigen.

Nach den Befunden von Clearfield & Mix (1999) und Mix et al. (1996) scheinen Kinder also gewisse Schwierigkeiten bei intermodalen Anzahlvergleichen zu haben und physische Eigenschaften für Anzahlvergleiche zumindest zu bevorzugen. Der Erklärungsansatz von Clearfield & Mix (1999), dass Kinder durchaus zu Anzahlunterscheidungen auf *numerischer* Basis fähig seien, jedoch wenn vorhanden bevorzugt auf *physische* Merkmale zurückgriffen, würde Wynns (1996) Befunde zu Anzahlunterscheidungen bei nicht-statischen Anzahlrepräsentationen erklären (s.o.). Sofern andere Informationen – wie beispielsweise Konturenlängen im Versuch von Clearfield & Mix (1999) – nicht zugänglich sind, können Kinder also offensichtlich auf numerische Merkmale zurückgreifen. Da die Dreier-Sprünge der Puppen in Wynns (1996) Versuch jedoch mehr Aufwärtsbewegungen als die Zweier-Sprünge beinhalten, kann nicht ganz ausgeschlossen werden, dass Kinder trotz allem auch hier lediglich kontinuierliche Dimensionen wahrnehmen (vgl. Feigenson et al. 2002, 37).

In diesem Zusammenhang sind einige Unklarheiten bzgl. der referierten Befunde zu diskutieren: Starkey & Cooper (1980; s.o.) hatten zu ihrem Experiment zur Unterscheidung von zwei vs. drei Punkten zusätzlich Kontrollversuche mit vier vs. sechs Punkten durchgeführt. Bei diesen größeren Anzahlen konnten die Kinder jedoch nicht mehr zwischen den Anzahlen unterscheiden. Dies werteten die Autoren als Beleg für die Verfügbarkeit von sogenannten subitizing-Prozessen, welche eine schnelle Anzahlerfassung nur kleiner Megen bis vier „auf einen Blick“ bezeichnet.

Als ‚subitizing’ (lat.: subitus = plötzlich) bezeichnet wird in der Regel ein wahrnehmungsgestütztes, schnelles Erfassen einer kleinen Anzahl ohne diese zählen zu müssen. Die Reaktionszeit beim Bestimmen von Mengen größer drei steigt deutlich an – dies legt nahe, dass Anzahlen bis drei nicht einzeln ausgezählt werden müssen. Ob subitizing als angeborener ganzheitlich ablaufender oder als serieller Wahrnehmungsprozess zu verstehen ist oder ob dem Prozess des subitizing ein angeborenes numerisches Konzept zugrunde liegt, wird unterschiedlich beantwortet:

Wynn sieht im subitizing eine angeborene, modalitätsunabhängige numerische Fähigkeit (vgl. 1990, 189; 1995, 36); sie vermutet genetisch angelegte numerische Basiskonzepte, die bereits bei kleinen Kindern Vorstellungen über Mengen ermöglichen. U.a. Simon (1997) und Sophian (1992) nehmen dagegen an, dass subitizing eine rein perzeptuell ablaufende ganzheitliche Mengenrepräsentation darstellt, der andere Lernmechanismen zugrunde liegen als der numerischen Fähigkeit zu zählen: Erst eine Zuordnung von Zahlworten zu einzelnen Elementen bedeute nach Simon (1997) numerisches Wissen. Dagegen gehen Gallistel & Gelman (1993) davon aus, dass dem subitizing trotz noch fehlender Zählfertigkeiten bereits elementare Zähl- bzw. sequenzielle Prozesse zugrunde liegen, die einzelnen Elemente also einzeln (präverbal!) gezählt werden, und zwar so schnell, dass die Anzahlbestimmung augenblicklich anmutet. Gallistel & Gelman (1993, 65; 71) verstehen die Fähigkeit zum subitizing als genetische Grundlage der Zählprinzipien. Ähnlich wie Meck & Church (1983) aus ihren Untersuchungsbefunden mit Tieren einen abstrakten Zahlensinn bzw. einen angeborenen Zählmechanismus folgern, würde ein solcher von Gallistel & Gelman (1993) vermuteter schneller Aufzählprozess von einem angeborenen Zählmechanismus gesteuert. Befunde über Patienten mit Hirnläsionen sprechen *gegen* eine solche Annahme des subitizing als eines seriellen Prozesses: Die Hirnverletzungen dieser Patienten hatten Auswirkungen auf deren visuelle Wahrnehmungsfähigkeit, was u.a. dazu führte, dass die Patienten nicht mehr zählen konnten. Trotzdem war es ihnen möglich, Mengen mit bis zu drei Elementen rasch und korrekt zu erfassen (vgl. Dehaene 1999, 85f.).

Vieles spricht für subitizing als rein perzeptuellem Wahrnehmungsakt (vgl. Bideaud 1995; Krajewski 2003, 2005; Moser Opitz 2002; Simon 1997; u.a.). Dabei wird angenommen, dass sich der Mensch bis zu drei oder vier sichtbare Objekte simultan merken bzw. sie repräsentieren kann (keeping track). Dies bedeutet dann aber, dass Kinder Objekte repräsentieren, jedoch keine Mengen mit kardinalem Wert, was wiederum bedeutet, dass ein und zwei Elemente voneinander nicht auf der Basis numerischer Mengenrepräsentation unterschieden werden (vgl. Xu & Spelke 2000, B3). Dies würde die Befunde von Starkey & Cooper (1980; s.o) erklären, dass Kinder nicht vier von sechs Punkten unterscheiden können, da diese Mengen ihre Kapazität zur Objektrepräsentation übersteigen würde; allerdings müsste damit auch die – erfolgreich bewältigte – Unterscheidung von zwei und drei Punkten aufgrund zu geringer Kapazitäten unmöglich sein (vgl. Xu & Spelke 2000, B3).

Xu & Spelke (2000) führten daher Experimente mit 6 Monate alten Säuglingen durch, in denen Anzahlen zu unterscheiden waren, die genügend groß waren, um nicht auf der Grundlage solcher aufmerksamkeitsgesteuerten Objektrepräsentationen ablaufen zu können. Sie untersuchten, ob Säuglinge zur Repräsentation großer Anzahlen im Stande seien und kontrollierten dazu alle nicht-numerischen, kontinuierlichen Variabeln. Sie testeten die Diskriminationsfähigkeit an 8 vs. 16 und an 8 vs. 12 Elementen (Displays mit in Größe und Anordnung differierenden Punktmengen). Säuglinge waren dabei in der Lage, Anzahlen zu repräsentieren und voneinander dann unterscheiden zu können, wenn die *Abstände* genügend groß sind (8 vs. 16 war möglich, 8 vs. 12 dagegen nicht). Daraus kann geschlossen werden, dass Anzahlen nur ungefähr, schätzend repräsentiert werden können, nicht aber exakt. Ähnlich interpretierbare Befunde von Wynn & Bloom (1999) zeigen, dass eine solche Unterscheidung auch bei kleineren Anzahlen funktioniert, sofern das Verhältnis der Anzahlen 1:2 entspricht (vgl. Xu & Spelke 2000, B8). Offen bleibt dabei dennoch die Frage, weshalb eine Unterscheidung von zwei vs. drei Elementen trotz des geringen Abstandes in vielen Experimenten möglich war (vgl. u.a. Antell & Keating 1983; Starkey & Cooper 1980; Starkey et al. 1990; Strauss & Curtis 1981; Wynn 1996). Eine denkbare Erklärung dafür wäre, dass Säuglinge bei kleinen Anzahlen auf wahrnehmungsgestützte Prozesse zur Objektrepräsentation zurückgreifen, sie die Mengen dann also wahrnehmen als Sammlung einzelner Dinge mit unterscheidbarer Beschaffenheit, nicht aber als Menge mit unterschiedlicher Kardinalität (vgl. Xu & Spelke 2000, B9; vgl. auch u.).

Da in den Experimenten von Xu & Spelke (2000) wahrnehmungsgebundene Variabeln wie räumliche Ausdehnung, Konturenlängen, Display-Größe etc. kontrolliert worden sind, sind die Reaktionen eindeutig nicht auf physikalisches Wissen zurückzuführen. Daher kann auf das Vorhandensein eines gewissen Zahlensinnes – wenn auch in sehr restringierter Form – geschlossen werden:

> „We conclude that the true representations of number, rather than representations of continuous quantities or capacity-limited mechanisms of object-based attention, underlie infants' responses." (ebd., B8).

Also stellt der subitizing-Bereich bis 3 keine Grenze der numerischen Kompetenzen von Säuglingen dar (vgl. ebd., B6). Aufgrund der noch fehlenden Verfügbarkeit von und Erfahrungen mit verbalem Zählen und formaler Arithmetik gehen die Autoren von einer spontanen Entwicklung des Zahlensinns aus als Fähigkeit zu ungefährer, aber numerisch basierter Anzahlrepräsentation (vgl. ebd., B8).

Die oben referierten Befunde von Clearfield & Mix (1999) und von Xu & Spelke (2000) scheinen sich also zu widersprechen: Weshalb sollten Kinder bei kleinen Anzahlen keinerlei numerische Kompetenzen verfügbar haben, bei großen Anzahlen dagegen schon? Dass Anzahlrepräsentationen bei kleinen Mengen auch numerisch basiert sind, belegt Carey (2001) mit ihrer Darstellung von „object-file representations". Diese stellen ein System paralleler Repräsentationen *kleiner* Objektmengen dar. Dabei nutzen Säuglinge mentale Symbole (Token) zur Repräsentation jeder zu zählenden Einheit. Vergleiche zwischen Mengen würden dann über 1-zu-1-Zuordnungen zwischen mentaler Repräsentation und konkreten Objekten stattfinden. Solche Repräsentationen bestehen also aus einem Symbol („file") für jedes einzelne repräsentierte Objekt („object") und werden daher als „object-file representations" bezeichnet (ebd., 43).

Carey (2001, 48) untersucht analoge Mächtigkeitsrepräsentationen und „object-file"-Repräsentationen und kommt ebenso wie Xu & Spelke (2000) zu dem Schluss, dass Säuglinge über zwei zahlenrelevante Repräsentationssysteme verfügen – analoge Mächtigkeitsrepräsentationen und „object-file"-Repräsentationen. Danach sind „object-file"-Repräsentationen in fünffacher Hinsicht numerisch basiert (vgl. Carey 2001, 47):

1. Das Anlegen einer neuen „Objektdatei“ erfordert die Anwendung der Prinzipien der Objektindividuation und der numerischen Identität: Es muss sichergestellt werden können, dass ein vorliegendes Objekt das gleiche ist wie zuvor gesehen; dazu werden wie oben gezeigt eher raum-zeitliche Charakteristika als Art oder Eigenschaft genutzt.
2. Das Öffnen einer neuen „Objektdatei“ während andere aktiv sind stellt eine natürliche Repräsentation des Hinzufügens (Addierens) um 1 zu einer Anordnung dar.
3. „object-file“-Repräsentationen stellen implizite Repräsentationen von Objektmengen dar.
4. Sofern „Objektdateien“ auf der Basis von 1-zu-1-Korrespondenzen miteinander verglichen werden, stellen diese Prozesse die Grundlage für die Entwicklung von Einsicht in numerische Äquivalenz und mehr/weniger-Beurteilungen dar.
5. „Objektdateien“ repräsentieren Anzahlen exakt bis zu einer Menge von vier.

Danach stellen daher „object-file“-Repräsentationen ebenso wie analoge Mächtigkeitsrepräsentationen ein System von Kernwissen dar, welches evolutionär verankert und präverbal verfügbar ist sowie sogar ein neurologisches Korrelat aufweist – interessanterweise wird es ebenso wie analoge Mächtigkeitsrepräsentationssysteme im inferioren parietalen Cortex lokalisiert (vgl. ebd.). Diese Sichtweise würde u.a. Dehaenes (1999, 78) Annahme widersprechen, dass kleinen Kindern numerische Ordnungsbegriffe fehlten und daher Begriffe wie ‚kleiner’ und ‚größer’ erst spät etwickelt würden. Das Modell der „object-file“-Repräsentation würde dagegen die Grundlage für mehr-/weniger-Beurteilungen schaffen. Carey (2001, 48) macht zugleich die Unterschiede zwischen dieser und der analogen Mächtigkeitsrepräsentation deutlich: Anders als letztere sind „object-file“-Repräsentationen nicht fest Zahl-Repräsentationen zugeordnet und können keine allgemeine Repräsentation der natürlichen Zahl leisten, da sie zum einen keine Kardinalwerte symbolisieren können (die Symbole repräsentieren lediglich die einzelnen Objekte selbst) und zum anderen an sehr kleine Anzahlen gebunden sind. Das „object-file“-Modell kann also zur Erklärung der beobachteten Kompetenzen in Bezug auf *kleine* Anzahlen dienen. Es ermöglicht in gewisser Weise das Ableiten numerischer Information aus der Herstellung von 1-zu-1-Zuordnungen zwischen „Objekt-Dateien“ bzw. zwischen „Objekt-Dateien“ und konkret verfügbaren Objekten sowie das Verfolgen von Objektbewegungen bzw. -veränderungen und eine Beurteilung der Objektmengen auf dieser physikalischen Basis. Feigenson et al. (2002, 63ff.) gehen dagegen davon aus, dass Säuglinge ihre Aufmerksamkeit stärker auf den Vergleich der Ausdehnung von kontinuierlichen Mengen richten als auf 1-zu-1-Korrespondenzen (vgl. 1.3.2).

In Bezug auf *größere* Anzahlen und auf *nicht-gegenständliche Reize* wird nach Carey (2001, 47f.) und Feigenson et al. (2002, 65) nicht auf „Objekt-Dateien", sondern auf analoge Mächtigkeitsrepräsentationen zurückgegriffen:

> „When there are too many objects to be tracked using object-file representations, infants may instead rely on an analog-magnitude mechanism to represent large sets and their approximate cardinal values. When collections, sounds, or events are presented, object-files are unlikely to be opened because there are no objects to be tracked." (Feigenson et al. 2002, 65)

Dies passt zu den Befunden von Xu & Spelke (2000), die zeigten, dass große Anzahlen bei genügend großen Abständen (8 vs. 16) repräsentiert und voneinander unterschieden werden können: Danach werden Anzahlen nur ungefähr, also schätzend repräsentiert, nicht aber exakt.

Ebenso wie Carey (2001) kamen Xu & Spelke (2000) so zu dem Schluss, dass Säuglinge über zwei zahlenrelevante Repräsentationssysteme verfügen – analoge Mächtigkeitsrepräsentationen und „object-file"-Repräsentationen. Diese zwei zahlenrelevanten Repräsentationssysteme beziehen sich auf unterschiedliche Repräsentationen und Anzahlen, so dass unabhängig von physikalischem Wissen aufgrund dieser domänenspezifischen Repräsentationssysteme numerisches Wissen bzw. dessen Vorläuferkonzepte bereits im Säuglingsalter entstehen. Insgesamt sind sowohl gewisse elementare numerisch-arithmetische als auch physikalische Konzepte vorhanden, ihre Aktivierung jedoch repräsentations- und anzahlabhängig. Zudem überlappen sich beide Systeme teilweise, was eine präzise Zuordnung unmöglich macht.

Angeborenes Kernwissen in Form von räumlich-analogem schätzendem Zugang und in Form von 1-zu-1-Zuordnungen bei kleinen Anzahlen (object-file) allein reichen jedoch nicht als ontogenetische Fundierung mathematischen Wissens aus. Carey (2001, 38f.) bemerkt, dass die diskutierten analogen Mächtigkeitsrepräsentationen die dem Zahlensystem zugrunde liegende Nachfolger- bzw. Reihungsfunktion nicht abbilden und vermutet andere oder zumindest zusätzliche Kernprinzipien, die die Basis für das Zahlkonzept bilden. Die Fähigkeit der Unterscheidung nach gleich/ungleich könnte auf dem Prinzip der 1-zu-1-Zuordnung basieren. Das Verständnis von Handlungssequenzen, also raum-zeitlichen Bezügen muss dagegen auf einem Prinzip von Reihung basieren. Eine mögliche Erklärung für die z.T. uneinheitlichen Befunde wäre eine parallele Verfügbarkeit sowohl von ganzheitlichen Wahrnehmungsprozessen auf der Grundlage physikalisch basierter Wahrnehmungsleistungen oder auf der Grundlage von 1-zu-1-Zuordnungen als auch von seriellen Wahrnehmungsprozessen auf der Grundlage von Reihung. *Mathematische* Entwicklung steuernde Prinzipien wären danach also sowohl 1-zu-1-Zuordnung als auch Reihung (jede Zahl hat genau einen Nachfolger) (vgl. Carey & Spelke 1994).

Die ebenfalls auf dem Kernprinzip ‚Reihung' basierende Bildung asymmetrischer Relationen wie größer/kleiner blieb in den bisher diskutierten Studien unberücksichtigt. Wie und ab wann solche asymmetrischen Relationen und quantitativen Veränderungen wahrgenommen werden, wird nachfolgend erörtert.

1.3.2. Mengenvergleiche und -operationen

Studien, nach denen Säuglinge auch Mengen*veränderungen* richtig beurteilen können, erhärten die Annahme angeborener Grundlagen mathematischen Wissens. Sensitivität für quantitative Veränderungen wird belegt in Studien, die zeigen, dass Säuglinge überrascht reagieren, wenn vorgenommene Mengenveränderungen nicht zum korrekten Ergebnis führen.

Neben der Frage, ob Neugeborene in der Lage sind, Mengen nach gleich/ungleich zu unterscheiden, ist also auch die Frage nach der Wahrnehmung von Anzahl*beziehungen* interessant: Relationen zwischen Anzahlen im Sinne von ‚kleiner als' oder ‚größer als' scheinen für Säuglinge besoders schwierig zu sein. Die Befunde aus Coopers Habituationsstudien zeigten, dass Kinder bis etwa 14 Monate Anzahlen nach gleich/verschieden beurteilen, nicht aber eine gerichtete Verschiedenheit als größer oder kleiner erkennen konnten (vgl. Cooper 1984, 162ff.). Ein Verständnis ordinal geordneter Anzahlen im Sinne von $1<2<3<\ldots$ baut daher vermutlich auf der früheren Ebene einer ungeordneten Unterscheidung nach ‚gleich/ungleich' auf. Kleine Anzahlen in eine Reihenfolge zu bringen und nach ‚größer/kleiner als' zu beurteilen, gelingt etwa mit 2 bis 3 Jahren (vgl. Cooper et al. 1983, zit. n. Bideaud 1995, 691). Erst dann kann hinzufügenden Handlungen eine Bedeutung im Sinne von ‚mehr' und wegnehmenden Handlungen eine Bedeutung im Sinne von ‚weniger' beigemessen (vgl. Bideaud 1995, 691) und echtes Verständnis *additiver und subtraktiver Operationen* entwickelt werden. Im Folgenden werden entsprechende Untersuchungen zu frühen **arithmetischen** Konzepten vorgestellt:

Bereits Starkey et al. (1990, 124) bezeichnen die Fähigkeit von Säuglingen, zwei Anzahlen miteinander zu vergleichen und nach gleich oder verschieden zu beurteilen als eine frühe Form numerischer Berechnung und vermuten, dass diese Operation über eine Art der 1-zu-1-Zuordnung vorgenommen werde. Besonders in nachfolgend vorgestellten Transformationsstudien von Wynn (1992) wurden Art und Verfügbarkeit arithmetischer Konzepte untersucht. In diesen Experimenten beobachteten 5 Monate alte Kinder mit Mäuse-Puppen ausgeführte Additions- und Subtraktionshandlungen, die zu richtigen oder falschen Ergebnissen führten (vgl. Abb. 1.5). Die Kinder wurden in zwei

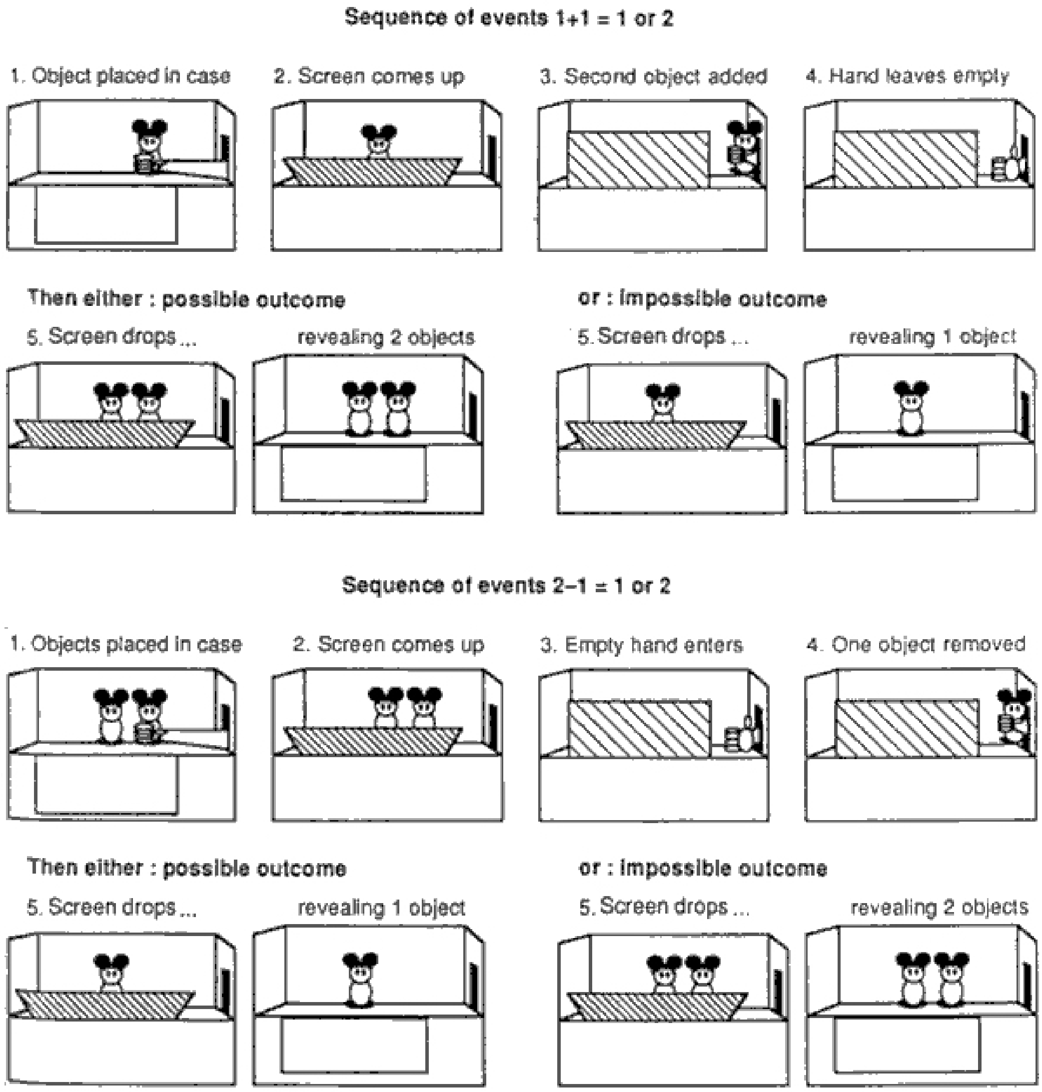


Abbildung 1.5: Versuchsdesign von Wynn (1992) (dort entnommen, 749)

unterschiedliche Untersuchungsgruppen eingeteilt – eine Gruppe nahm an Versuchen zur Addition („1+1 group“) und die andere an Versuchen zur Subtraktion („2-1 group“) teil. Der Additions-Gruppe wurde eine Mäuse-Puppe auf einer Bühne gezeigt. Diese Puppe wurde durch einen Sichtschutz verdeckt und eine zweite Mäuse-Puppe wurde gut sichtbar geholt und auch hinter den Sichtschutz gestellt. Auf diese Weise wurde eine additive Handlung modelliert. Abschließend wurde der Sichtschutz wieder entfernt. Dabei wurde zwischen zwei Situationen gewechselt: Hinter dem Sichtschutz befanden sich entweder wie erwartet zwei Puppen („possible outcome“) oder nur eine Puppe („impossible outcome“). Der Subtraktions-Gruppe wurde entsprechend eine Handlungssequenz mit subtraktivem Charakter vorgeführt (vgl. Abb. 1.5). Die Kinder schauten signifikant länger auf die unerwarteten Lösungen, also auf die falschen Ergebnisse („impossible outcomes“), die offensichtlich ihren Vorstellungen über logische Konsequenzen widersprachen. Wynn (1992) interpretiert diese Befunde als Anzeichen dafür, dass bereits Säuglinge Ergebnisse arithmetischer Operationen exakt bestimmen und von falschen Ergebnissen unterscheiden könnten und daher im Mengenbereich bis drei nicht nur über numerische Konzepte, sondern auch über arithmetische Kompetenz verfügten. Die Autorin geht insbesondere davon aus, dass Säuglinge ordinale Relationen zwischen kleinen Anzahlen verstehen könnten (mehr oder weniger werden bzw. sein), was über eine simple Wahrnehmung von gleich/ungleich-Relationen hinausgehen würde.

Simon et al. (1995) replizierten diese Befunde in einer eigenen Transformationsstudie, modifizieren jedoch Wynns Schlussfolgerungen (vgl. auch Simon 1997, 356ff.): Die Basis, auf der die Kinder Ergebnisse als möglich oder als nicht möglich beurteilen, müsse nicht ausschließlich ein arithmetisches Konzept sein, da jedes *arithmetisch* unmögliche Ergebnis in Wynns Experimenten ebenso auch *physikalisch* unmöglich war (vgl. Simon et al. 1995, 255). Um zu überprüfen, ob Kinder ihre Ergebniserwartungen tatsächlich nur auf die Wahrnehmung physikalischer Gesetzmäßigkeiten gründen, erweiterten Simon et al. ihre Replikationsstudie um zwei Aspekte (vgl. ebd., 256ff.):

a) „Impossible identity“: Hier ist das Ergebnis zwar arithmetisch, nicht aber physikalisch möglich, da die Anzahl erwartungskonform korrekt ist, die Identität der Puppe jedoch ausgetauscht wird, hier also anstatt des erwarteten Ernie ein Elmo erscheint.
b) „Impossible arithmetic and impossible identity“: Hier ist das Ergebnis sowohl arithmetisch als auch physikalisch unmöglich, Anzahl und Identität der Figuren sind also nicht erwartungskonform.

Diese Erweiterung diente der Beurteilung der zwei möglichen Erklärungsalternativen für das beobachtete Verhalten: Wenn die Kinder sich bei beiden zusätzlichen Testitems gleich verhalten würden, spräche das gegen Wynns Interpretation als arithmetischer Kompetenz und für die Annahme einer Wahrnehmung physikalischer Gesetzmäßigkeiten. Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau für Additionssituationen (vgl. Abb. 1.6). Entgegen der Erwartung der Autoren, Kinder würden arithmetisch korrekte, physikalisch aber unmögliche Ergebnisse länger anschauen und damit ihre Annahme einer rein physikalischen Beurteilung von Situationen stützen, beachteten die Kinder den Identitätswechsel nicht, sondern konzentrierten sich anscheinend auf *arithmetisch* relevante Merkmale (vgl. ebd., 265f.).

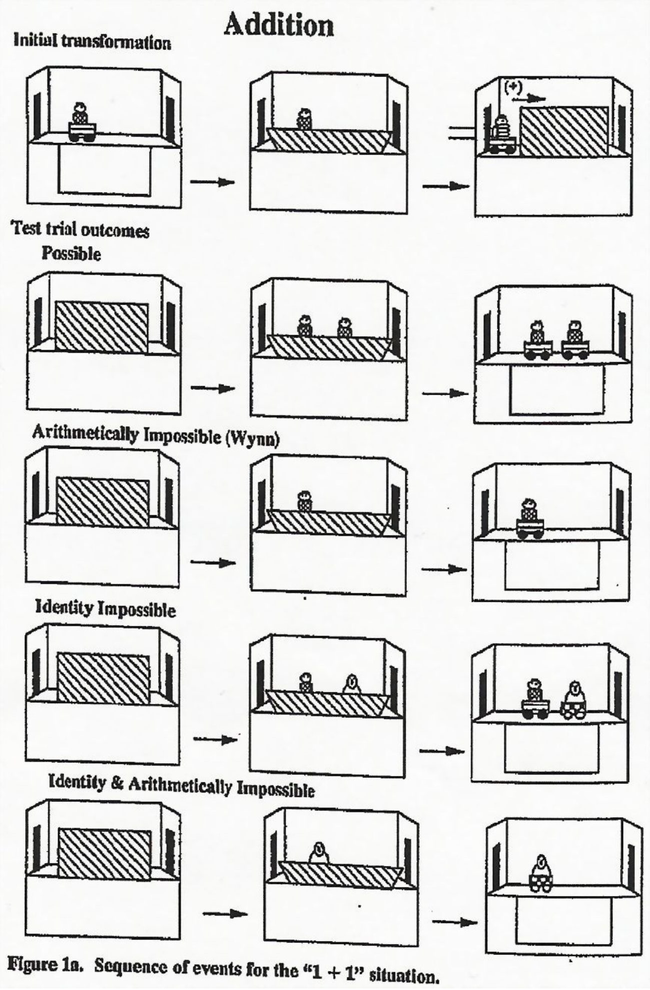


Abbildung 1.6: Versuchsdesign von Simon et al. 1995 (dort entnommen, 260)

Die Autoren konnten mit ihrer Untersuchung insgesamt zwei Befunde verschiedener früherer Studien replizieren: Zum einen schauen Kinder signifikant länger auf arithmetisch unmögliche Ergebnisse als auf arithmetisch und physikalisch korrekte Ergebnisse. Zum anderen ignorieren Kinder die Identität von Figuren, die in einer Form sichtbar sind, dann hinter einem Sichtschutz verdeckt werden und schließlich wieder in einer anderen Form zum Vorschein kommen. Sie richten ihre Aufmerksamkeit in diesem Fall vielmehr auf die zeitlich-räumliche Ausdehnung und Existenz der Objekte (vgl. ebd., 267). Diese Befunde interpretieren die Autoren als Hinweis auf gewisse Zusammenhänge zwischen numerischer und physikalischer Existenz, da numerisches und arithmetisches Verständnis physikalisches Wissen über die Objekte und deren Beziehungen untereinander beinhaltet:

> „Thus, numbers are labels for, among other things, collections of objects and arithmetic is a language for the results of interactions between those objects. Therefore, any understanding of numerical or arithmetical concepts ought to be intimately bound up with an understanding of physical objects and the conditions of their existence." (ebd., 268).

Allerdings ist dabei das dritte Experiment aus Wynns Studie (1992) zu berücksichtigen, in dem die *Richtung* der Anzahlveränderung beachtet werden sollte. Ein solcher Nachweis würde zeigen, dass Kinder nicht *irgendwelche* Änderungen erwarteten, sondern präzise Vorstellungen über die *Richtung* der Veränderung und über die genaue Anzahl haben. Dazu wurde der Versuchsaufbau derart modifiziert, dass in der Additionssituation das arithmetisch unmögliche Ergebnis nicht aus einer Puppe *weniger*, sondern aus einer Puppe *mehr* bestand, also zwischen dem korrekten Ergebnis ‚2' und dem unmöglichen Ergebnis ‚3' unterschieden werden musste. Damit wären hier *beide* Ergebnisalternativen (2 und 3) anders als die Ausgangsanzahl (1). Hätten die Kinder keine genauen Erwartungen an die Lösungsanzahl, dürften keine Reaktionsunterschiede bei den Ergebnissen zu finden sein – beide Ergebnisse zeigen ‚mehr'. Die Kinder schauten hier wie erwartet signifikant länger auf die unmöglichen Ergebnisse und bestätigten damit Wynns Annahme. Aus ihren Befunden dieser und früherer Untersuchungen folgerte Wynn (1995, 41ff.), dass Säuglinge Beziehungen zwischen kleinen Anzahlen beurteilen und Resultate von Rechenoperationen präzise berechnen könnten. Insgesamt geht sie von umfangreichen numerischen und arithmetischen Konzepten bei Säuglingen aus. Ihre Position bedeutet eine frühe Verfügbarkeit von kardinalen und ordinalen Zahlkonzepten, was insbesondere dazu befähigen müsste, die Richtung bzw. den Umfang von Größenveränderungen bestimmen zu können (vgl. Simon 1997, 351ff.).

Trotzdem nehmen u.a. Simon (1997), Bideaud (1995, 691) und Dehaene (1999, 77f.) zunächst nur die Fähigkeit ungeordneter Unterscheidungen nach ‚gleich/ungleich' an und erst viel später eine derartige (ordinale) Ordnung der Anzahlen im Sinne von „1<2<3<viele“. Alle beobachteten Verhaltensweisen in Wynns Untersuchungen (1992, 1995) lassen sich nach Simon (1997, 358) als ‚gleich/ungleich'-Urteile interpretieren, was lediglich 1-zu-1-Zuordnungen im Sinne von Dantzig (1954; zit. nach Simon 1997; s.o.) erfordert (vgl. auch Cooper 1984). Das beobachtete Verhalten der Kinder wird also nicht als arithmetische Kompetenz interpretiert, sondern als Ausdruck intuitiven Wissens um physikalische Gesetzmäßigkeiten, basierend auf zeitlich-räumlichen Informationen. Säuglinge erwarten daher, dass „Ein Ding und ein Ding hinter dem Sichtschutz“ zu nichts weiter als zu der Situation „Ein Ding und ein Ding hinter dem Sichtschutz“ führen, sie also wahrgenommene, unterscheidbare Elemente als Einheiten mental behalten, repräsentieren und erwarten können (vgl. Simon 1997, 368). Carey (2001, 43) beschreibt dies folgendermaßen: „[…] a set containing one apple might be represented: ‚0' or ‚apple', and a set containing two apples might be represented ‚0 0' or ‚apple apple'“ (vgl. oben 1.3.1 zu wahrnehmungsgestützten Prozessen zur Objektrepräsentation nach Xu & Spelke 2000).

Feigenson et al. (2002, 33ff.) weisen darauf hin, dass in früheren Studien nicht ausreichend die Variabeln der *kontinuierlichen* Stimulus-Eigenschaften kontrolliert worden seien, so dass nach wie vor unklar bleibe, ob Säuglinge auf numerische Merkmale oder auf physikalische Merkmale reagierten. Eine Überprüfung der Diskriminationsfähigkeit zwischen kleinen Anzahlen wurde unter Beachtung solcher stetigen physikalischen Eigenschaften von Clearfield & Mix (1999) und von Xu & Spelke (2000) durchgeführt (vgl.

1.3.1). Feigenson et al. (2002) kontrollierten ebenso diese Variabeln in Bezug auf arithmetische Kompetenz und prüften die Aussagen von Wynn (1992). Die Autoren manipulierten dazu die vordere Oberflächenausdehnung dreidimensionaler Objekte (Figuren aus Lego-Steinen) sowie mit der Oberfläche korrelierende Merkmale wie ‚Volumen', ‚Konturenlänge', ‚Gesamtoberfläche' und trennten die physikalischen von den numerischen Variabeln, so dass deren Einflussanteile jeweils eindeutig zugeordnet werden konnten.

Wie Xu & Carey (1996) schließen auch Feigenson et al. (2002) aus ihren Experimenten, dass die als arithmetische Kompetenz bezeichneten Verhaltensweisen auf der Wahrnehmung von Zeit-, Raum- und Oberflächen- bzw. Ausdehnungsmerkmalen der Objekte basieren können. Jedes arithmetisch unmögliche Ergebnis bei Wynn (1992) war auch physikalisch unmöglich: Beispielsweise repräsentiert ein Objekt eine festgelegte Ausdehnung im Raum; fügt man ein zweites Objekt hinzu, verdoppelt sich diese Ausdehnung; auf die unerwarteten Ergebnisse bei Wynn (1992) bezogen bedeutet das, dass beispielsweise das unmögliche Ergebnis ‚1' der Erwartung einer doppelt so großen Ausdehnung widerspricht (Analoges gilt für die Befunde von Wynn (1995), bei dem das Ergebnis ‚3' der Erwartung einer doppelten Ausdehnung von ‚1' widerspricht):

> „Infants' increasing looking at one object after seeing 1+1 might thus be due to a violation of their expectations about *how many objects* to expect or to a violation of their expectations about *how much of a continuous quantity* to expect." (vgl. Feigenson et al. 2002, 36; Hervorheb. i. Orig.).

Die Befunde älterer Studien erlauben also keine Differenzierung zwischen „how many objects" und „how much of a continuous quantity".

In eigenen Experimenten benutzten die Autoren daher dreidimensionale Objekte in zwei Größen, wobei ein großes Objekt genau den doppelten Oberflächeninhalt wie ein kleines Objekt hatte und ein anzahlmäßiges Vermehren der Objekte („how many") sowie ein Vermehren der Oberflächenausdehnung („how much") möglich war (vgl. ebd., 38ff.). In verschiedenen Habituationsversuchen konnten die Autoren zunächst Belege finden sowohl für die Möglichkeit, dass Säuglinge tatsächlich die Anzahl von Objekten repräsentieren und auf numerische Veränderungen reagieren können als auch für die Möglichkeit, dass das Verhalten auf der Wahrnehmung kontinuierlicher Mengen beruht, wobei bei einer Separation von Anzahl- und Ausdehnungsstimuli letztere ebenso wie bei Clearfield & Mix (1999; s.o.) dominant waren, d.h. bevorzugt beachtet wurden (vgl. Feigenson et al. 2002, 41ff.).

Um ausschließen zu können, dass physikalische Reize eventuell vorhandene, schwächere numerische Reize überdecken, wurde in weiteren Experimenten die numerische

Sensitivität direkt untersucht, indem die Merkmale ‚Anzahl' und ‚kontinuierliche Ausdehnung' strikt getrennt wurden, so dass die Reaktionen entweder auf numerischer oder auf physikalischer Basis erwartet werden konnten, aber nicht beide Zugänge gleichzeitig möglich waren.

In dem aus nachfolgender Abbildung ersichtlichen Versuch wurde die Ausdehnung der Testitems ausgeglichen, so dass beide Möglichkeiten gleich neuartig in ihrer Ausdehnung waren (vgl. Abb. 1.7). Das bedeutet beispielsweise für das obere Beispiel in der Abbildung, dass die Kinder auf ein Objekt mit mittlerer Größe habituiert wurden und ihnen anschließend entweder ein oder zwei kleine Objekte vorgelegt wurden. Bei der Präsentation eines kleinen Testobjektes ist dessen Ausdehnung kleiner als die des Habituationsobjektes, bei der Präsentation von zwei kleinen Objekten ist deren Ausdehnung größer als die des Habituationsobjektes. Die totale Differenz zwischen einem kleinen und dem mittleren Objekt ist genauso groß wie die zwischen zwei kleinen und dem mittleren Objekt, so dass im Falle einer ausschließlichen Reaktion auf physische Eigenschaften keinerlei Unterschiede zwischen beiden Testitems zu finden sein dürften, da beide im Vergleich zum Habituationsobjekt abweichende *Ausdehnungen* aufweisen (vgl. ebd., 45). Die abweichende *Anzahl* des zweiten Testitems müsste dann unberücksichtigt bleiben. Dieses Experiment erbrachte keinerlei Belege für eine Wahrnehmung der Kardinalwerte der Mengen (vgl. ebd., 47). Ebenso wenig konnten Versuche, bei denen während der Habituationsphase die Anzahl beibehalten, die Ausdehnung der Objekte jedoch variiert wurde und bei denen in der Testphase die Ausdehnung konstant gehalten wurde, Belege für numerisch basierte Reaktionen liefern (vgl. ebd., 48ff.). Diese Befunde bestätigen Clearfield & Mix' (1999; s.o.) Ergebnisse.

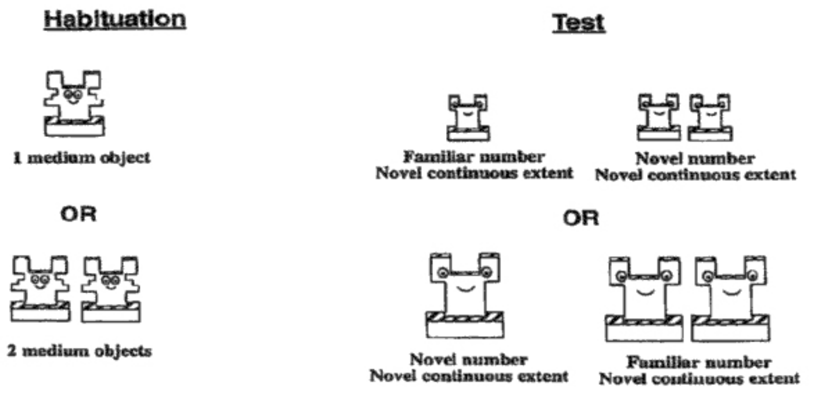


Abbildung 1.7: Versuchsdesign I. von Feigenson et al. (2002) (dort entnommen, 46)

Ebenso wurde mit arithmetischen Situationen verfahren (vgl. Abb. 1.8): Im oberen Beispiel der Abbildung führt das Zusammenfügen von zwei kleinen Objekten entweder zum numerisch-arithmetisch unmöglichen Ergebnis ‚1' bei gleichzeitiger korrekter

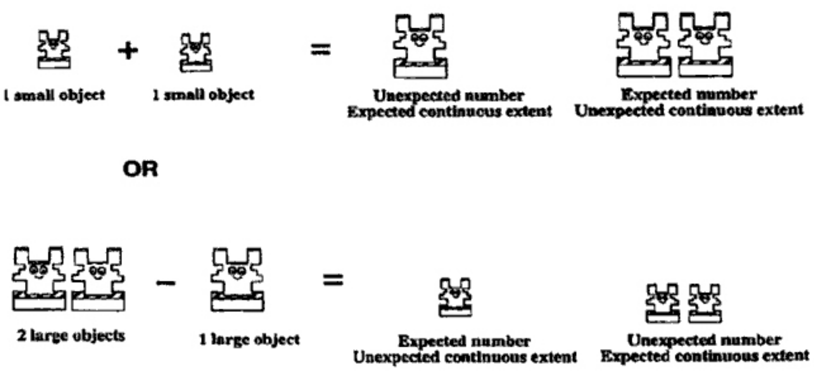


Abbildung 1.8: Versuchsdesign II. von Feigenson et al. (2002) (dort entnommen, 58)

Gesamtausdehnung (ein großes Objekt hat die gleiche Ausdehnung wie zwei kleine Objekte zusammen) oder zum arithmetisch-numerisch erwarteten Ergebnis ‚2' bei gleichzeitiger unerwarteter Gesamtausdehnung. Dieses Design ähnelt dem von Simon et al. (1995; s.o.), bei dem anstelle der Ausdehnung die Identität wechselte. Dort hatten die Kinder unmögliche Identitäten ignoriert zugunsten einer Beachtung der Anzahl. Feigenson et al. (2002, 57) vermuten im Merkmal ‚Identität' jedoch einen schwächeren Reiz als im Merkmal ‚Ausdehnung'. Ihre Befunde stützen die Ergebnisse ihrer vorausgegangenen Habituierungsstudien, dass Kinder nur Veränderungen von kontinuierlichen Mengen wahrnehmen, nicht aber Anzahlen oder arithmetische Operationen numerisch erfassen.

Die in früheren Studien vermischten numerischen und physikalischen Merkmale wurden also von Feigenson et al. (2002) systematisch separiert, was zu fundierteren Befunden führte. Danach betrachteten Säuglinge solche Ergebnisse länger, die keine korrekte Oberflächenausdehnung darstellten unabhängig von numerischen Aspekten. Eine korrekte Aufsummierung von Oberflächen war wichtiger als eine korrekte Anzahl. Diese Befunde belegen damit nur eine Sensitivität gegenüber kontinuierlichen Mengen bzw. ihrer Ausdehnung, nicht aber gegenüber Anzahlen.

Xu & Spelke (2000; vgl. 1.3.1) untersuchten wie Wynn & Bloom (1999; zit. n. Xu & Spelke 2000) jedoch die Fähigkeit von Säuglingen zur Repräsentation diskreter Anzahlen bei *großen* Mengen und konnten hier tatsächlich *numerisch* basierte Reaktionen nachweisen. Vor diesem Hintergrund und unter Bezug auf Bijeljac-Babic et al. (1991) und Wynn (1996), die mit nicht-gegenständlichen Stimuli arbeiteten (Silben bzw. Bewegungen), räumen Feigenson et al. (2002, 37f., 61) ein, dass Säuglinge unter bestimmten Konditionen Mengen in numerischem Sinne repräsentieren können.

Insgesamt ist es Säuglingen also möglich, durch vermehrende oder vermindernde Handlungen erzeugte Unterschiede sowohl präzise an Mengen als auch ungefähr an kontinuierlichen Größen wahrzunehmen. Sie können unter Einbezug räumlich-zeitlicher Information feststellen, ob etwas hinzugekommen oder ob etwas weniger geworden ist als vorher.

1.3.3 Zusammenfassung und Diskussion

Die Annahme kompetenter, aktiver Säuglinge veranlasste Wissenschaftler dazu, bereits bei Neugeborenen nach Belegen für frühe, bereichsspezifische Konzepte zu suchen. Habituierungs- und Transformationsversuche erbrachten eine Fülle von Befunden, die frühe numerische und sogar arithmetische Kompetenz belegen sollten: Säuglinge zeigten sich in der Lage, die Anzahl von Objekten im Rahmen kleiner Zahlenräume zu erfassen, sowohl kleine als auch große Anzahlen voneinander zu unterscheiden sowie quantitative Veränderungen wahrzunehmen und zu beurteilen. Die zentrale Fragestellung der meisten referierten Untersuchungen bezog sich auf den primären Zugang von Säuglingen und Kleinkindern zu Mengen und Zahlen: Im Mittelpunkt stand die Frage, ob Kinder auf physikalisches oder auf numerisches Wissen zurückgreifen und damit, ob sie kontinuierliche oder auch schon diskrete Mengen wahrnehmen können.

Säuglinge verfügen erwiesenermaßen schon früh über intuitives *physikalisches* Wissen: Sie wissen, dass Objekte auch dann weiter existieren, wenn sie aus dem Sichtfeld verschwinden (Objektpermanenz), dass Objekte nicht einfach durch andere hindurchgehen können (Solidität) und sich bewegende Objekte an Hindernissen anhalten bzw. dass ihre Bewegung ohne Hindernisse kontinuierlich weiterläuft (Kontinuität). Die Unterscheidung von Objekten aufgrund raum-zeitlicher Aspekte und aufgrund ihrer Bewegung ist dabei dominanter als die Berücksichtigung von Objekteigenschaften wie der Identität: Wenn ein Erwachsener beispielsweise einen Ernie hinter einem Sichtschutz verschwinden und kurze Zeit später auf der anderen Seite einen Elmo erscheinen sieht, wird er trotz des raum-zeitlich korrekten, kontinuierlichen Bewegungspfades auf zwei unterschiedliche Objekte (einen Ernie und einen Elmo) schließen können. Ein Säugling wird das Identitätsmerkmal zugunsten der raum-zeitlichen Bewegungslinie vernachlässigen und auf ein einziges Objekt schließen. Auf der Grundlage dieses intuitiven physikalischen Wissens werden Mengen ungefähr als kontinuierliche Größen wahrgenommen und unterschieden.

Dass Säuglinge trotz ihres nachgewiesenen physikalischen Wissens bestimmte Anforderungen nicht bewältigen, liegt nach Stern (2002, 31) nicht am Fehlen fundamentaler Konzepte, sondern ist zum Teil auf mangelnde Fähigkeit zur Koordination von Handlungsplänen zurückzuführen: Dies würde erklären, warum Säuglinge trotz ihres Wissens, dass verdeckte Objekte weiterhin existieren, nicht in der Lage sind, nach diesen zu greifen. Insgesamt verfügen bereits Säuglinge im Gegensatz zu Piagets Annahmen über umfangreiche Konzepte zu Zeit, Weg, Geschwindigkeit, Kausalität und Ausdehnung.

Die Befunde zu früher *numerischer* Sensitivität erscheinen zunächst widersprüchlicher: Beispielsweise Clearfield & Mix (1999) und Feigenson et al. (2002) konnten keinerlei Reaktion auf numerische Merkmale bei *kleinen* Anzahlen finden. Numerisch basierte Diskriminationsfähigkeit konnten dagegen Xu & Spelke (2000) bei *großen* Anzahlen und Wynn (1996) bei *nicht-gegenständlichen Objekten* nachweisen. Die *Interpretation* dieser Befunde ist dabei wie oben gezeigt ausschlaggebend: Eine mögliche Erklärung wäre, dass Säuglinge und Kleinkinder Anzahlen und arithmetische Operationen *bevorzugt* in nicht-numerischem Sinn wahrnehmen, und ihre Aufmerksamkeit eher auf physikalisch wahrnehmbare (und erklärbare) Veränderungen richten sofern diese vorhanden sind. Damit würden sie noch nicht über kardinale oder ordinale Zahlkonzepte verfügen (vgl. Feigenson et al. 2002; Krajewski 2003). Viele der diskutierten Befunde sprechen gegen ein vorsprachliches, abstraktes Zahlkonzept. Sie lassen sich jedoch auch noch aus einer anderen Perspektive interpretieren:

Dass Säuglinge *keinerlei* numerisches Verständnis haben und nur Veränderungen in der Ausdehnung kontinuierlicher Mengen im Sinne von gleich oder ungleich werden wahrnehmen könnten (vgl. Krajewski 2003, 2005; Simon 1997), kann als zumindest nicht vollständig gesichert gelten, da sowohl die referierten Replikations- und Nachfolgestudien frühere Befunde z.B. von Wynn (1992, 1995) zum Teil bestätigen konnten als auch alternative Erklärungen für die beobachteten Verhaltensweisen möglich sind: Es ist beispielsweise denkbar, dass Säuglinge diskrete Anzahlen wahrnehmen können, dies allerdings nur in Kombination mit entsprechenden physikalischen Merkmalen. In diesem Fall würden die Kinder über eine rezessive numerische und über eine dominante physikalische Sensitivität verfügen, wobei die numerische Sensitivität auf eine physikalische ‚Begleitung' angewiesen wäre. Auch scheinen Kinder zu Unterscheidungen auf numerischer Basis dann fähig zu sein, wenn *keinerlei* physikalische Eigenschaften zugänglich sind (vgl. Clearfield & Mix 1999). Dies würde die vorgängig formulierte Annahme rezessiver numerischer und dominanter physikalischer Sensitivität stützen, da so Kinder bei fehlenden physikalischen Merkmalen den latenter ausgeprägten numerischen Zugang durchaus zu aktivieren im Stande wären. Damit würden Säuglinge sowohl (diskrete) Anzahlen als auch (kontinuierliche) physikalisch wahrnehmbare Maße oder Ausdehnungen repräsentieren können. Zudem belegen die Befunde von Simon et al. (1995), dass Kinder unter gewissen Umständen das Merkmal ‚Identität' zugunsten arithmetischer und/oder zeitlich-räumlicher Aspekte vernachlässigen. Die Autoren gehen daher von engen Zusammenhängen zwischen frühem numerischen und frühem physikalischen Wissen aus.

Entscheidend für die Aktivierung der beiden Zugangsmöglichkeiten ‚physikalisch' und ‚numerisch' erscheinen bestimmte Mengenmerkmale zu sein: Insgesamt scheinen Säuglinge bei *kleinen* Anzahlen primär auf physikalische Eigenschaften zu achten und nur Veränderungen von kontinuierlichen Mengen wahrzunehmen. Bei *größeren* Anzahlen und bei nicht-gegenständlichen Stimuli scheinen sie dagegen auf numerische, eventuell in gewisser Hinsicht diskrete Repräsentationen zurückzugreifen (vgl. Feigenson et al. 2002). Sophian (1997, 347) geht davon aus, dass kognitive „Werkzeuge", die zu diskreter Objektrepräsentation eingesetzt werden, sowohl zum Entstehen von Objektwissen als auch von Zahlenwissen beitragen.

Insgesamt belegen entwicklungspsychologische Untersuchungen, dass der Mensch über genetisch verankerte, domänenspezifische Grundlagen des Wissenserwerbs verfügt. Dieses Kernwissen unterstützt die Orientierung in der Umwelt, die Aneignung komplexer, bereichsspezifischer Konzepte und ermöglicht einen beschleunigten Erwerb von Sprache, Zahlwortfolge etc. Diese Befunde sprechen gegen die Annahme allgemeiner, übergreifender geistiger Strukturen und für ein sehr frühes Entwickeln bereichsspezifischer, voneinander unabhängiger Konzepte. So verfügen Säuglinge ohne vorherige Handlungserfahrung über grundlegendes – intuitives – physikalisches, biologisches, psychologisches, sprachliches und auch numerisches Wissen und können auf dieser Basis beispielsweise Erwartungen an das ‚Verhalten' von Objekten unter bestimmten Bedingungen stellen und ihre Aufmerksamkeit spezifischen Aspekten zuwenden. Der Säugling nimmt seine Umgebung auf der Grundlage dieses genetischen ‚Wissens' wahr und bezieht das Wahrgenommene auf sich. Damit ergibt sich ein triadisches Bezugssystem: Ich – Hier (Raum) – Jetzt (Zeit). Damit ist der Säugling verankert in Raum und Zeit. Er nimmt wahr und bewegt sich auf dieser sich ergebenden Ebene. Auch die Fähigkeit zu vergleichen entwickelt sich innerhalb dieses frühen raum-zeitlichen Bezugssystems. Ebenso stellt das Wahrnehmen und Nutzen von Reihenfolgen und Korrespondenzen ein Korrelat von zeitlichen und räumlichen Bezügen dar. So wird angenommen, dass intuitives numerisches Wissen durch ein entsprechendes angeborenes „erstes Set" an Kernprinzipien gesteuert wird: Genetisch vorbereitetes Zahlenwissen bezieht sich auf die Kontexte ‚Menge' und ‚mathematische Operationen' und wird durch die (angeborenen oder sehr früh erworbenen) Kernprinzipien ‚Reihenfolgen' und ‚1-zu-1-Zuordnung' organisiert (vgl. Carey & Spelke 1994, 169f.). Das Prinzip ‚Reihenfolgen' ist Grundlage für das Verständnis davon, dass jede Zahl einen Vorgänger hat, der um 1 kleiner ist und einen Nachfolger, der um 1 größer ist (Ordinalkonzept). Durch die Verfügbarkeit der beiden Kernprinzipien ist der Zugang sowohl zu kontinuierlichen als auch zu diskreten Mengen zumindest vorbereitet. Parallel vorhanden sind auch wie gezeigt physikspezifische Zugänge im Sinne ganzheitlicher Wahrnehmungsprozesse auf der Grundlage physikalisch basierter Wahrnehmungsleistungen.

Auch wenn physikalische und numerische Grundlagen sehr früh erworben werden oder sogar im Sinne konzeptueller Module angeboren sind, finden im Entwicklungsverlauf noch wesentliche Veränderungen dieses Wissens statt – sowohl als allmähliche Anreicherung bestehenden Wissens als auch als radikalere begriffliche Restrukturierungen und als Verknüpfungen von verschiedenen Wissenseinheiten (vgl. ebd.; Sodian 2002, 456). Veränderung von Begriffswissen bedeutet danach sowohl eine Ausdifferenzierung von Begriffen, wobei ältere Begriffsmerkmale zungunsten neuer Merkmale unwichtiger werden können als auch den Aufbau neuer ontologischer Kategorien und domänenorganisierender Prinzipien (vgl. Carey & Spelke 1994, 179). Veränderung von Begriffswissen kann daher auch das Überwinden ursprünglicher Kernprinzipien und damit eine Umstrukturierung der Domäne bedeuten:

> „Studies of conceptual change […] suggest that human reasoners go beyond the principles at the core of their initial systems of knowledge. Reasoners do this, in part, by constructing mappings across different knowledge domains." (ebd., 194).

Aufbauend auf diesem ersten Wissen über Repräsentation, Vergleich und Beurteilung von Mengen und Mengenoperationen wird mit Beginn der sprachlichen Entwicklung ein neues Wissenssystem verfügbar, welches eine begriffliche Repräsentation von Mengen und Mengenbeziehungen ermöglicht: So werden beispielsweise die untersuchten vorsprachlichen Beurteilungen nach ‚gleich/ungleich' zunächst ergänzt um sprachliche quantitative Beurteilungen der Art ‚viel', ‚wenig', ‚mehr/weniger' etc. Auch der Beginn der *Zähl*entwicklung ist an den Spracherwerb geknüpft.

Nachdem in diesem Kapitel Befunde zu frühen bereichsspezifischen Kompetenzen vorgestellt worden sind, sollen nachfolgend wesentliche Komponenten und Erwerbsprozesse systematisiert, weitere Entwicklungsschritte beschrieben und zu einem Entwicklungsmodell zusammengeführt werden.

1.4 Erwerb mathematischer Kompetenz: Ein Entwicklungsmodell

Bisher wurden Befunde von Säuglings- und Kleinkindstudien vorgestellt, die untersuchten, ob der Mensch über angeborene abstrakte Zahlkonzepte verfügt. Diese Studien haben angeborene bereichsspezifische Kompetenzen belegt und gezeigt, dass Mathematiklernen von Geburt an stattfindet und dass sich grundlegende Fähigkeiten im Säuglings- und Kleinkindalter weiterentwickeln und ausdifferenzieren. Für das Verständnis des Erwerbs mathematischer Kompetenz ist dieses Wissen über bereichsspezifische Vorläuferfähigkeiten von großer Bedeutung (vgl. 1.6). Nachfolgend sollen für die Zahlbegriffsentwicklung relevante Komponenten und Erwerbsprozesse zu einem Entwicklungsmodell integriert werden.

Wie gezeigt, verfügen Säuglinge bereits präverbal über mathematikrelevante Kompetenzen. Mit Beginn der Sprachentwicklung wird diese Basis qualitativ erweitert: Durch Sprache können Mengen umfassender beschrieben und beurteilt und durch hinzutretende verbale Zählfertigkeiten weiter präzisiert werden. Im Gegensatz zu den präverbalen und pränumerischen, ungefähren Mengenbeurteilungen und -operationen erlaubt verbales Zählen einen *präzisen* Umgang mit Mengen: Kleine Mengen (‚wenig') können dadurch beispielsweise als ‚drei' angegeben werden. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Einsicht, dass Zählen der Feststellung von Kardinalwerten von Mengen dient und dass korrekte Zählvorgänge regelgeleitet, prinzipienbasiert erfolgen müssen. Die Verbindung von Mengen- und Zählwissen stellt jedoch einen langwierigen, hochkomplexen Prozess dar und vollzieht sich sukzessive.

Bedeutung und Beitrag angeborener linguistischer oder Objekt-Konzepte für den Erwerb numerisch-arithmetischer Konzepte lassen sich nicht eindeutig festlegen. Dies muss jedoch nicht nachteilig sein:

> „[…] the ability to count draws upon both linguistic knowledge and knowledge about objects; therefore it makes sense that these aspects of cognitive development would draw upon some of the same innate structures. […] It suggests that the difficulty we have had in specifying what the core domains of cognition are may reflect the fact that there is no one stable way of partitioning cognition into separate subsystems. Children make use of whatever cognitive tools they can to interpret their experiences, regardless of whether those experiences are ones that we would classify as linguistic, mathematical, physical, or psychological." (Sophian 1997, 347).

Sophian (1997, 347) sieht in dieser weitgefassten Annahme alternativer Zugänge den notwendigen Erklärungsraum für häufig inkonsistente Befunde quer durch einzelne Kulturen, Untersuchungen, Aufgabenstellungen, interindividuell und intraindividuell sogar bei gleichen Aufgabenstellungen. Danach wäre selbst für angeborene kognitive Aspekte ein Erprobungsprozess anzunehmen, bei dem das Kind unterschiedliche Zugänge ausprobiert und sich auf die jeweils effektivsten konzentrieren wird (vgl. ebd.). Das bedeutet, dass Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe ebenso wie andere Aspekte numerischer Entwicklung individuell unterschiedlich erfolgen können. Auch wird die Entwicklung in hohem Maß von individuell unterschiedlichen äußeren Bedingungen des Lernens und von Möglichkeiten zur Erprobung des Erlernten abhängen.

Entwicklungsverläufe sind also sowohl von genetischen und individuellen Faktoren als auch von sozio-kulturellen Bedingungen abhängig. Die nachfolgende Darstellung idealtypischer Modelle zu Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe ist immer auch vor diesem Hintergrund zu sehen.

Zur Erklärung der Zählentwicklung existieren verschiedene, zum Teil kontrovers diskutierte Theorien. Einseitige Positionen werden allerdings in der Regel nicht mehr vertreten, so dass sowohl die Annahme, Zählen werde allein durch Nachahmung und Übung gelernt als auch die Annahme, Zählen beruhe auf angeborenen Prinzipien als überholt gelten. Die Darstellung beschränkt sich hier auf zwei zentrale Ansätze, welche die Forschung in diesem Bereich wesentlich beeinflusst haben:

Gelman & Gallistel (1978) gehen bei ihrem Zählentwicklungsmodell von entwicklungsleitenden, angeborenen Zählprinzipien aus. Diese Position wird als „principles before"-Theorie bezeichnet, deren Annahmen einer sehr frühen konzeptuellen Kompetenz vielfach kritisch hinterfragt und in Teilaspekten durch Replikationsstudien widerlegt worden sind. Da korrektes Zählen immer prinzipiengeleitet sein muss, sind die von Gelman & Gallistel (1978) aufgestellten Zählprinzipien jedoch unabhängig von der Frage nach ihrer genetischen Verankerung für das Verständnis der Zählentwicklung von Interesse und sollen aus diesem Grund unten vorgestellt werden (vgl. 1.4.2).

Fuson (vgl. Fuson et al. 1982; Fuson & Hall 1983; Fuson 1988, 1992a, 1992b) betont im Gegensatz zu Gelman & Gallistel (1978) die Bedeutung von Sprache und Lernen für den Erwerb der Zahlwortreihe und für deren Verbindung mit Zähl- und kardinaler Bedeutung. Diese Theorie wird als sog. „principles after"-Theorie bezeichnet. Fusons Modell wird in der Literatur weitgehend akzeptiert und vielfach zur Beschreibung des Erwerbs und Ausbaus der Zahlwortreihe übernommen. Erweitert werden soll dieses Modell in der vorliegenden Arbeit durch die Integration der Annahme angeborener kognitiver Schemata nach Resnick (1983; 1989; Resnick et al. 1991; vgl. unten 1.4.3).

Einschränkend muss an dieser Stelle betont werden, dass der Erwerb komplexer Kompetenzen grundsätzlich ein langfristiger, nicht linearer Prozess ist, den Stufen- bzw. Entwicklungsmodelle nicht vollständig abzubilden vermögen, da dieser Prozess vielfältige Veränderungen oder Erweiterungen von Konzepten beinhaltet und neue überlegene kognitive Strukturen bestehende Strukturen nicht ablösen, sondern häufig zunächst parallel verwendet werden (vgl. Stern 1997, 165). Für die Entwicklung mathematischer

Kompetenz bedeutet das, dass beispielsweise Zählkonzepte und Mengenkonzepte zunächst nur punktuell, d.h. kontextabhängig miteinander verbunden werden und dass bestimmte Kompetenzen bereits auf elaboriertem Niveau bewältigt werden, andere dagegen noch sehr einfach sind. So müssen Zählentwicklung und Erwerb kardinalen Verständnisses als fortlaufende Entwicklungsprozesse verstanden werden, die von elementaren Vorstellungen sukzessive zu komplexen Konzepten erweitert werden und die in unterschiedliche Beziehungen zueinander treten können.

1.4.1 Kognitive Schemata als Ursprung mathematischer Entwicklung und zahlenspezifische Verarbeitungsprozesse

Bevor verschiedene Entwicklungsstufen des Zählens und anzuwendende Pinzipien beschrieben werden, sollen die den zahl- und mengenbezogenen Kompetenzen zugrunde liegenden Strukturen nach den Modellen von Resnick (1983; 1989; Resnick et al. 1991) und Dehaene (1992; 1999) ausführlich dargestellt werden.

Grundlage ist die Annahme, dass die Fähigkeit zu Wahrnehmung und Repräsentation von Zahlen sowie die Fähigkeit zum Nachdenken über Zahlen im Menschen genetisch vorbereitet sind (vgl. 1.3). Ursprung dieser Kompetenzen sind nach Resnick (1989; Resnick et al. 1991) vermutlich zwei mathematikspezifische intuitive Wissenskomponenten bzw. kognitive Schemata, deren Entwicklung und Integration für das weitere mathematische Lernen notwendige Voraussetzung sind:

1. Ein **räumlich-analoges Schema** ist die Basis für **Mengenwissen** bereits auf vorzahliger, intuitiver Ebene und
2. ein **digital-sequenzielles Schema** ist Grundlage für **Reihenbildung** und für den mit der Sprachentwicklung verbundenen Erwerb der **Zahlwortreihe**.

Da auf dieser Ebene Mengenwahrnehmung, -beurteilung und -operationen noch ohne exakte Quantifizierung ablaufen, wird dieses Mengenverständnis als ‚protoquantitativ' bezeichnet. Die Annahme eines sequenziellen Schemas ist kompatibel mit der Annahme eines angeborenen Kernprinzips der Reihung und die Annahme eines analogen Schemas entspricht zumindest zum Teil der des angeborenen Kernprinzips der 1-zu-1-Zuordnung (als Basis des Mengenvergleichs) (vgl. o. 1.3 und insbes. Carey & Spelke 1994).

Auf der Basis dieser kognitiven Schemata entwickelt sich also sowohl zahl- als auch mengenbezogenes Vorwissen. Die Entwicklung der beiden Bereiche verläuft jedoch zunächst getrennt, so dass Zähl- und kardinale Situationen für Kinder zunächst unterschiedliche und getrennte Wissenssysteme bzw. Aktivitäten sind. Für den Aufbau eines vollständigen Zahlkonzeptes müssen diese beiden Entwicklungsstränge eine Verknüpfung erfahren (vgl. Gerster & Schultz 2000, 74; Resnick 1989, 162ff.). Die Punkte, an denen die beiden Wissenssysteme miteinander verbunden werden, werden weiter unten ausführlich erläutert (vgl. 1.4.3).

Bereits kleine Kinder verfügen wie in 1.3 gezeigt vorsprachlich über intuitive pränumerische **Mengenkonzepte**. Dieses mengenbezogene Wissen differenziert sich vorsprachlich und sprachlich in spezifischen Schemata aus. Auf der Grundlage solcher unterschiedlichen protoquantitativen Schemata können rein wahrnehmungsgestützt oder über 1-zu-1-Zuordnungen Vergleiche vorgenommen und Vorgänge des Mehr- und Wenigerwerdens sowie des Zerteilens und Zusammensetzens verstanden werden. Mit einsetzender Sprachentwicklung können Kinder dann Mengen beurteilen (viel/wenig), vergleichende Aussagen der Form ‚mehr/weniger' treffen, sie können die Folgen von Veränderungen an Mengen verstehen (Hinzufügen bedeutet Vergrößern der Ausgangsmenge und Wegnehmen kann als Verkleinern interpretiert werden) und Kinder können auf pränumerischer Ebene nachvollziehen, welche Auswirkungen Veränderungen einer Teilmenge auf die Gesamtmenge haben etc.

Insgesamt lassen sich drei verschiedene, zunächst protoquantitative Schemata als Basis mengenbezogenen Wissens unterscheiden (vgl. Resnick 1983; 1989; Resnick et al. 1991):

1. **compare schema oder Schema des Vergleichs**

Bereits im Säuglingsalter verfügt der Mensch über vorbereitetes, präverbales Wissen über Einheiten und Folgen und er erkennt Unterschiede zwischen verschiedenen Größen, Mengen und Folgen (z.B. Sprungfolgen; vgl. 1.3). Beurteilungen werden so präverbal und pränumerisch auf der Basis von Vergleichen, nicht jedoch von absoluten Größen vorgenommen.

Mit Beginn der Sprachentwicklung treten protoquantitative Ausdrücke und Begriffe hinzu, mit deren Hilfe bereits unter Zweijährige auf einer reinen Wahrnehmungsebene ohne präzise Messung Mengenbeurteilungen der Art ‚groß', ‚viel' etc. fällen können. Wenig älteren Kindern ist es möglich, durch Betrachten zweier Mengen diese miteinander zu vergleichen und korrekte verbale Mengenvergleiche der Art ‚größer / kleiner', ‚mehr / weniger' oder ‚höher / niedriger' vorzunehmen. Diese protoquantitativen Vergleichsfähigkeiten sind zunächst Grundlage für Klassifikation, da diese das Erkennen von Gleichheiten, Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten durch Vergleichen erfordert. Und zum anderen ist die protoquantitative Fähigkeit zum Vergleichen Voraussetzung für das spätere numerische Vergleichen von Mengen. Die Ausformung des Vergleichsschemas vollzieht sich dabei im Entwicklungsverlauf (vgl. 1.4.3) über protoquantitative, nicht-quantifizierte Mengen zu quantifizierten Mengen, dann zu spezifischen Zahlen und schließlich zu generellen Operationen (vgl. Abb. 1.9).

<u>I. Protoquantitative Ebene</u>
Kinder bewältigen zahlwortunabhängig Vergleiche der Art ‚mehr/weniger' oder ‚höher / niedriger'. In Verbindung mit der ZWR können sie mengenunabhängig aufgrund der Reihenfolge entscheiden, dass z.B. 3 kleiner ist als 5.

<u>II. Ebene quantifizierter Mengen</u>
Die Menge 3 ist kleiner als die Menge 5, weil sie weniger Elemente enthält.

<u>III. Zahlebene</u>
Zahlvergleich durch Unterschiedsermittlung: Der Unterschied zwischen 6 und 8 beträgt 2. Der Unterschied 2 kann sich darüber hinaus auf viele andere Zahlbezieungen beziehen:
$(2 – 0) = (3 – 1) = (8 – 6) = (36 – 4) = \ldots$

<u>IV. Ebene genereller Operationen</u>
$n – m = (n + a) – (m + a)$
$n – m = (n – a) – (m – a)$

Abbildung 1.9: Entwicklung des kognitiven Vergleichsschemas (in Anlehnung an Resnick 1992) (I., III. & IV. nach Resnick 1992, 410f.)

2. **increase / decrease schema oder Schema des Vermehrens / Verminderns**

Auf dieser Basis können Prozesse des Hinzufügens und Wegnehmens interpretiert werden. Dieses Schema befähigt Kleinkinder zu verbalen Beurteilungen über die Auswirkungen von Mengenveränderungen, also zu zeitlich versetzten Vergleichen: Fügt man einer Menge etwas hinzu, vergrößert sich diese (sie wird *größer* als sie *vorher* war), nimmt man von einer Menge etwas weg, so verkleinert sie sich (sie wird *kleiner* als sie *vorher* war) und fügt man weder etwas hinzu noch nimmt man etwas weg, so bleibt die Menge unverändert.

Dazu ist die Wahrnehmung der Veränderungs*richtung* notwendig. Dies gelingt jedoch erst mit etwa 2 bis 3 Jahren (vgl. Cooper et al. 1983, zit. n. Bideaud 1995, 691; vgl. 1.3.2). Resnick (1989, 163) geht von einem Alter von 3 bis 4 Jahren aus und bezieht sich vermutlich auf entsprechende Kompetenzen auf verbaler Ebene. Entgegen Wynns Befunden (1992; 1995), bereits 5 Monate alte Säuglinge verfügten über kardinale und ordinale Zahlkonzepte und könnten Richtung und Umfang von Größenveränderungen bestimmen wird weitgehend nur von einer frühen Fähigkeit ungeordneter Unterscheidungen nach ‚gleich / ungleich' (vgl. o. das protoquantitative Vergleichsschema) und einer viel späteren ordinalen Ordnung der Anzahlen im Sinne von „1<2<3<viele" ausgegangen (vgl. Bideaud 1995, 691; Dehaene 1999; Simon 1997).

Das Verständnis protoquantitativen Vermehrens oder Verminderns kommt ohne parallele visuelle Repräsentation aus: Ohne dass ein Kind den Vorher- und Nachherzustand vor Augen hat, ist es in der Lage, festzustellen, dass es mehr Äpfel *werden*, wenn die Mutter jedem Kind zusätzliche Äpfel gibt oder dass eine Maus einige aufgefressen haben muss, wenn jetzt weniger als zuvor verblieben sind (vgl. Resnick 1992, 404). Solche zeitlich versetzten Vergleiche beruhen auf Einsicht in Ungleichheitsbeziehungen und sind Voraussetzung für das spätere Anwenden von Ordnungsrelationen auf Mengen (Seriation). Das Schema des Vermehrens und Verminderns stellt ein intuitives Verständnis einfacher Addition und Subtraktion im Sinne von Hinzufügen und Wegnehmen sowie von Mengenerhaltung dar. ‚Einfache' (bei Resnick et al. 1991, 32: „unary addition and subtraction") deshalb, weil hier im Gegensatz zum Teile-Ganzes-Schema (s.u.) additive und subtraktive Handlungen noch nicht als komplementäre Prozesse und Mengen noch nicht als zusammengesetzt verstanden sein müssen; das Vergrößern oder Vermindern kann noch unidirektional verlaufen. Die Ausformung des Schemas des Vermehrens und Veminderns vollzieht sich dabei im Entwicklungsverlauf (vgl. 1.4.3) über protoquantitative, nicht-quantifizierte Mengen zu quantifizierten Mengen, dann zu spezifischen Zahlen und schließlich zu generellen Operationen (vgl. Abb. 1.10).

<u>I. Protoquantitative Ebene</u>

Kinder verstehen, dass eine Menge / Ausdehnung mehr (weniger) wird, wenn etwas hinzugefügt (entfernt) wird.

Am Beispiel folgender Textaufgabe sollen die weiteren Ebenen illustriert werden:

„John hatte 17 Murmeln. Er verlor 11 davon im 1. Spiel und er verlor 4 im 2. Spiel. Wie viele Murmeln hatte er dann noch?"

<u>II. Ebene quantifizierter Mengen</u>

17 Murmeln (– 11 Murmeln) (– 4 Murmeln) = 2 Murmeln

<u>III. Zahlebene</u>

17 (– 11) (– 4) = 2

<u>IV. Ebene genereller Operationen</u>

(– 11) + (– 4) = (– 15) bzw.:

(– m) + (– n) = – (m + n)

Abbildung 1.10: Entwicklung des kognitiven Vermehren/Vermindern-Schemas (in Anlehnung an Resnick 1992, 410f.)

3. Part-whole schema oder Teile-Ganzes-Schema

Dieses Schema besteht aus differenzierten Komponenten, welche das Wissen über Zerlegen und Zusammenfügen von Mengen organisieren und welche auf unterschiedliche Art die Verhältnisse und Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen betreffen: Beispielsweise verändert die Zerlegung einer Menge den Gesamtumfang dieser Menge nicht, das Vergrößern oder Verkleinern eines Teils der Gesamtmenge dagegen schon – die Menge vergrößert bzw. verkleinert sich entsprechend (vgl. Gerster & Schultz 2000, 75). Die Einsicht, dass Mengen in Teile zerlegbar und aus Teilen zusammenfügbar sind, ist für das spätere Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen und für effektives, nicht-zählendes Rechnen grundlegend:

> „The protoquantitative part-whole schema is the foundation for later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of number that underlies the place value system." (Resnick et al. 1991, 32).

Dieses protoquantitative Schema der Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen entwickelt sich mit etwa 5 Jahren als pränumerisches Konzept zunächst „aus ‚real-life-situations', in denen zusammengesetzt und zerlegt wird, aber noch keine exakte Quantifizierung erforderlich ist" (Gerster & Schultz 2000, 339). Die Ausformung des Teile-Ganzes-Schemas vollzieht sich dabei im Entwicklungsverlauf (vgl. 1.4.3) über nicht-quantifizierte Mengen zu quantifizierten Mengen, dann zu spezifischen Zahlen und schließlich zu generellen Operationen (vgl. Abb. 1.11).

I. Protoquantitative Ebene

(a) $T_1 + T_2 + T_3 = G$

(b) $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

(c) $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

T = Teil; G = Ganzes

II. Ebene quantifizierter Mengen

(a) 3 Äpfel + 5 Äpfel + 4 Äpfel = 12 Äpfel

(b) 3 Äpfel + 5 Äpfel = 5 Äpfel + 3 Äpfel

(c) (3 Äpfel + 5 Äpfel) + 4 Äpfel = 3 Äpfel + (5 Äpfel + 4 Äpfel)

III. Zahlebene

(a) $3 + 5 + 4 = 12$

(b) $3 + 5 = 5 + 3$

(c) $(3 + 5) + 4 = 3 + (5 + 4)$

IV. Ebene genereller Operationen

(a) $l + m + n = o$

(b) $l + m = m + l$

(c) $(l + m) + n = l + (m + n)$

Abbildung 1.11: Entwicklung des kognitiven Teile-Ganzes-Schemas (in Anlehnung an Resnick 1992, 408f.)

Auf der Basis dieser drei protoquantitativen Schemata entwickelt sich also das vorzahlige Mengenverständnis der Kinder und differenziert sich mit Beginn der Sprachentwicklung weiter aus. Ebenfalls sprachlich gestützt entwickelt sich **das zahlbezogene, sequenzielle Vorwissen** weiter. Auf der Basis des digital-sequenziellen Schemas wird mit Beginn der Sprachentwicklung der Erwerb der Zahlwortreihe möglich und damit erst die Zählentwicklung. Die Bedeutung der Sprache für die Entwicklung sowohl von Mengen- als auch von Zählkonzepten ist damit trotz genetischer vorsprachlicher Anteile des Kompetenzerwerbs herausragend. Eine höherwertigere Ebene und neue Struktur im Zahlverständnis entsteht durch die Integration der Zahlwortreihe mit den protoquantitativen Schemata – dabei wird ein erster Berührungspunkt zwischen Zahlwortreihe und Vergleichsschema angenommen (vgl. Resnick 1989, 164; Resnick et al. 1991, 34; s. auch 1.4.3).

Grundlage für die Entwicklung umfassenden Zahlverständnisses sind also sowohl protoquantitatives Mengenwissen als auch Zählkompetenzen, deren Erwerb durch ein analoges und ein sequenzielles kognitives Schema vorbereitet ist. Die Erweiterung durch Lernprozesse findet vorschulisch informell in Alltagssituationen und später in der Schule institutionalisiert-formell statt. Eine zentrale Ressource zu expliziter Förderung der protoquantitiven Schemata und deren Integration mit der Zahlwortreihe sehen Resnick et al. (1991, 34) im Bereich der Sachaufgaben (vgl. dazu 3.3.4).

Während Resnick wie dargestellt vom digital-sequenziellen und räumlich-analogen Schema ausgeht, beschreibt Dehaenes neurokognitionspsychologisches „**Triple Code Model**“ eines modularisierten Gehirns für mathematisches Lernen wichtige Verarbeitungsprozesse (vgl. Dehaene 1992, 1999). Geht man von Resnicks Modell aus, müssen diese auch auf den elementaren sequenziellen und analogen Schemata beruhen. Mit Hinzukommen von Sprache und symbolischen Konventionen müssen allerdings Repräsentations- bzw. Kodierungsebenen ausdifferenziert werden bzw. neu hinzukommen. Mathematikspezifische Verarbeitungsprozesse laufen damit differenzierter ab: Dehaene nimmt so eine kategorie- und kodierungsspezifische Zahlverarbeitung über vernetzte Hirnfunktionsmodule an (vgl. Dehaene 1992). Das „Triple Code Model“ beschreibt mathematikspezifische Verarbeitungsformate, die drei zentralen Modulen zugeordnet werden:

Diese Module verarbeiten jeweils unterschiedliche Zahlaspekte, so dass die Zusammensetzung der beteiligten Module bei verschiedenen Aufgaben unterschiedlich sein kann:

1. Der **auditiv-sprachliche Modul** verarbeitet Zahlen in Wortform; dieser Modul beinhaltet also das Lernen und Verwenden der Zahlen als Worte und Wortreihen sowie das Abspeichern von Rechenfakten.
2. Ein zweiter Modul verarbeitet Zahlen auf **visuell-arabischer Repräsentationsebene**, ist also für das Lesen und Schreiben von Ziffern(anordnungen), für schriftliches Ziffernrechnen (Berechnungen auch mit mehrstelligen Zahlen) und für das Stellenwertverständnis von Bedeutung.

Diese ersten beiden Module sind also an Sprache und an das Lernen von bildlichen und symbolischen Darstellungen gebunden. Beide müssen zumindest zum Teil auf dahinterstehende, elementare sequenzielle Strukturen zurückgreifen.

3. Der **analog-semantische Modul** repräsentiert nicht-sprachlich Zahlen als analoge Position auf einem inneren Zahlenstrahl und erlaubt den Umgang mit Quantitäten: Die Mächtigkeit von Mengen kann erfasst, geschätzt und beurteilt werden (z.B. viel / wenig), Mengen können quantitativ verglichen werden (z.B. mehr / weniger) und die Bedeutung von Mengen und Mengenoperationen wird einsichtig.

Im „Triple Code Model" werden Zahlen also sprachlich als Zahlwort, graphisch als Ziffer und semantisch als Position in einer mentalen Zahlenraumvorstellung verarbeitet und aktiviert. Dabei sind diese zahlenverarbeitenden Funktionen nicht *einem* spezifischen mathematischen Hirnbereich zuzuordnen (vgl. Dehaene 1992; 1999; 2001): Beide Hemisphären verfügen offenbar über einen analog-semantischen und einen visuell-arabischen Modul, lediglich der auditiv-sprachliche Modul ist als Bestandteil der sprachverarbeitenden Hirnregionen der linken Hemisphäre zuzuordnen, so dass die linke Hemisphäre Ausfälle der rechten weitgehend kompensieren könnte (es wird allerdings von einer Überlegenheit der rechtshemisphärischen analog-semantischen Repräsentation ausgegangen) (vgl. von Aster 1996, 14f.). Dagegen würden linkshemisphätische Ausfälle, „insbesondere was die sprachabhängigen Funktionen betrifft, zu schwerwiegenden und kaum kompensierbaren Funktionseinbussen führen" (ebd., 15).

Dehaene unterscheidet nicht nur wie Resnick zwischen analoger und sequenzieller Zahlrepräsentation, sondern unterscheidet darüber hinaus noch in Zahlwort- und Zifferrepräsentation. Beides betrifft Erwerbsprozesse bereits im Vorschul- und Schulalter, da kulturell normierte Sprach- und Zeichensysteme betroffen sind. Die ganz frühen Prozesse bleiben unberücksichtigt: Bei Dehaene ist die zunächst getrennt verlaufende Entwicklung von protoquantitativen Schemata und Zählschema und deren spätere Integration zum mentalen Zahlenstrahl und schließlich zum Erwerb der vollständigen Kardinalität bereits zusammengefasst im analog-semantischen Modul: Dort wird die quantitative Gestalt einer Zahl als analoger Ort auf einem mentalen Zahlenstrahl (und damit auch ordinal interpretiert) angenommen – hier wäre also die notwendige, nach Resnick (1983, 1989; Resnick et al. 1991) oder auch nach Gerster & Schultz (2000) gezielt zu unterstützende, weil sich nicht automatisch einstellende Integration räumlich-analoger und verbal-sequenzieller Zahlaspekte bereits vollzogen. Gerade das ist aber ein wesentlicher Entwicklungsschritt zu umfassendem mathematischen Verständnis und soll daher in 1.4.3 sehr ausführlich dargestellt werden. Zunächst werden jedoch kurz die korrekten Zählprozessen zugrunde liegenden Prinzipien vorgestellt.

1.4.2 Zählprinzipien

Wird die Zahlwortreihe auf Mengen angewandt, werden also Objekte gezählt, wendet das Kind bestimmte Zählprinzipien an. Gelman & Gallistel (1978) u.a. vertreten die Vorstellung, dass der Mensch über ein angeborenes Zahlkonzept bestehend aus einem Set von Zählprinzipien verfügt, welche die Entwicklung des Zahlverständnisses und der Zählfertigkeiten leiten. Die Autoren gehen davon aus, dass Kinder Anzahlen nicht ganzheitlich durch subitizing (vgl. 1.3.1) o.ä. wahrnähmen, sondern dass bereits diesen Anzahlbestimmungen – präverbale – Zählprozesse zugrunde liegen müssten. Danach würden fünf angeborene Zählprinzipien die Zählentwicklung steuern, so dass keine ganzheitliche, sondern eine *sequenzielle* Mengenerfassung angeboren sein muss. Für die Existenz von subitizing-Vorgängen im Sinne eines elementareren wahrnehmungsgestützten Mechanismus' zur Anzahlerfassung sehen die Autoren keine Belege, da ihre Probanden sämtlich – insbesondere die jüngsten – *Zähl*prozeduren zeigten (vgl. ebd., 220). Später relativierten Gallistel & Gelman (1992, 65) diese Auffassung insofern, als sie im subitizing den Ursprung der Zählprinzipien vermuten. Sie nehmen an, dass die Prinzipien, welche den verbalen Zählprozess steuern, als Prinzipien bereits dem präverbalen subitizing immanent seien (vgl. ebd., 71).

Wynn (1990, 189) vertritt dazu die Ansicht, dass lediglich das ‚subitizing' als frühes wahrnehmungsgestütztes Bewusstsein für Mengen(-veränderungen), bzw. für Anzahlen bis drei und deren Benennung angeboren sei, die Zählprinzipien dagegen erlernt werden müssten. Geht man davon aus, dass es sich bei ‚subitizing' um eine *Mengen*repräsentation handelt, der „andere Lernmechanismen zugrunde liegen als dem Zählen" (Moser Opitz 2002, 83), erscheint die Annahme verschiedener, unabhängiger Wissenssysteme nahe liegend (vgl. o. 1.4.1): So gehen u.a. Resnick (1989; auch Resnick et al. 1991) und Wynn (1990) davon aus, dass Mengenwissen zunächst unabhängig vom Zählwissen ist:

> „However, even if it turns out that young children do have an abstract representation of the counting routine that honors principles of counting, they may not understand the relationship between counting and numerosity." (Wynn 1990, 161).

Festgehalten werden kann, dass Zählprinzipien vermutlich nicht vollständig genetisch angelegt, wohl aber vorbereitet sind.

Nachfolgend werden die Zählprinzipien im Einzelnen erläutert: Bei diesen fünf genetisch vorbereiteten Zählprinzipien können drei sogenannte „how-to-count princples", ein „what-to-count principle" sowie ein eher übergeordnetes „order-irrelevance principle" unterschieden werden (vgl. zu Nachfolgendem Gelman & Gallistel 1978, 203-219):

Mithilfe der „how-to-count principles“ können Mengen gezählt und verglichen werden. Sie stellen ein Schema aus elementaren Prinzipien dar, welche das frühe Zählverhalten leiten und strukturieren und eine Einordnung dieser Tätigkeiten ermöglichen. Bereits im Alter von 2½ Jahren nutzen Kinder die „how-to-count principles“. Das Zählschema bzw. die Zählprozedur verfeinert sich dabei im Verlauf der Zeit und wird zur Routine. Zu den „how-to-count principles“ zählen:

1. **„one-one principle“** (Eineindeutigkeitsprinzip): Jedem Element der zu zählenden Menge wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
2. **„stable-order principle“** (Prinzip der stabilen Ordnung): Die Zahlworte werden beim Zuordnen zu Elementen in einer festgelegten Reihenfolge (Zahlwortfolge) benutzt.
3. **„cardinal principle“** (Kardinalprinzip / last-word-rule): Das bei einem Zählprozess zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte, also den Gesamtumfang der Menge an. Die Entwicklung des Kardinalprinzips setzt die beiden ersten „how-to-count principles“ voraus und entwickelt sich entsprechend später. Der besondere Stellenwert des Kardinalprinzips im Unterschied zu den ersten beiden Prinzipien besteht darin, dass es ausschließlich für Zählprozesse von Bedeutung ist, nicht aber bei anderen Aktivitäten verwendet werden kann; das Verständnis dieses Prinzips hängt dabei von der Einsicht in die Bedeutung von Zählvorgängen als Bestimmung der *Anzahl* ab (vgl. Wynn 1990, 161; vgl. 1.4.3).

Diese drei Zählprinzipien beziehen sich auf die Funktionsweise des Zählprozesses, also auf die eher prozedurale Komponente des Zählvorgangs. Das nachfolgend beschriebene vierte Zählprinzip bezieht sich auf den Verwendungszweck des Zählens und wird als „what-to-count principle“ bezeichnet (Gelman & Gallistel 1978, 80 & 213ff.):

4. **„abstraction principle“** (Abstraktionsprinzip): Die “how-to-count principles” lassen sich auf jede (diskrete) physische und nicht-physische Objektmenge beziehen.

Das letzte Zählprinzip, das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung der Zählobjekte, ist insofern ein besonderes Prinzip, als dass es sich nicht nur allgemein auf die Zählfertigkeit auswirkt, indem es sie wie die übrigen Prinzipien regelt, sondern ein tiefergehendes Verständnis von Zahlen und Zählbedeutung umfasst (Gelman & Gallistel 1978, 82, 216ff.):

5. **„order-irrelevance principle“** (Prinzip der Irrelevanz der Anordnung der Zählobjekte): Für den Akt des Zählens ist die Anordnung der zu zählenden Elemente irrelevant. Dies stellt eine wesentliche Einsicht in die Zählbedeutung und in

den Zusammenhang von Zählen und Mengenbedeutung dar, da hiermit die Zahlwortzuordnung zu einem Objekt beliebig wird; d.h., ein Element nimmt innerhalb einer auszuzählenden Menge keine feste Position ein (z. B. wird es nicht mit „4“ gleichgesetzt). Die Positionen sind hier irrelevant, da sie temporär sind und die Anzahl der Gesamtmenge auch bei veränderter Reihenfolge der Einzelelemente unverändert bleibt; von Interesse ist also der Kardinalwert der Menge. Die korrekte Anwendung dieses Prinzips weist auf bestimmte grundlegende Einsichten – bewusst oder unbewusst – hin: Zum einen liegt dem sinnvollen Gebrauch des Prinzips die Einsicht zugrunde, dass die Kardinalzahl bei weiteren Zählungen gleich bleibt unabhängig von der Anordnung der Elemente. Zum anderen muss verstanden sein, dass ein gezähltes Element ein Ding ist, dem während des Zählvorgangs ein Zahlwort zugeordnet wird, es deshalb aber keineswegs „eins“ oder „zwei“ an sich ist, sondern die Zahlwortzuordnung willkürlich erfolgt, nur für den Moment gilt und kein zeitüberdauerndes Merkmal des gezählten Elements ist. Ist diese Einsicht noch nicht vorhanden, kann es zu vermeintlich kuriosen Lösungen von Kindern kommen wie beispielsweise folgender: Ein Kind gibt zu der Aufgabenstellung „8 – 4“ die Lösung „7“ an; eine mögliche Erklärung dafür wäre folgendes Vorgehen (vgl. Abb. 1.12): Dabei wird „minus 4“ umgesetzt als Wegnehmen der Position 4, bzw. als Entfernen des Elementes, dem das Kind den „Namen“ ‚vier’ gegeben hatte. Die verbleibende Reihe wird neu gezählt (die Elemente nach der Position 4 werden allerdings ‚neu benannt’, da das Kind weiß, dass der Zahlwortreihe eine stabile Reihenfolge zugrundeliegt – das Prinzip wird hier also inkonsequent bzw. instabil eingesetzt). Gelman & Gallistel argumentieren anders, haben dazu allerdings andere Aufgaben als die diskutierte gestellt: Sie nehmen an, dass Kinder, die keine Einsicht in dieses Prinzip hätten, eine Reihe, die sie zuvor korrekt mit „eins, zwei, …“ bezeichnet hatten, konsequenterweise mit „zwei, drei, …“ bezeichnen müssten, würde man das erste Element (also

8 – 4 = ?   Antwort: „7“

Begründung:

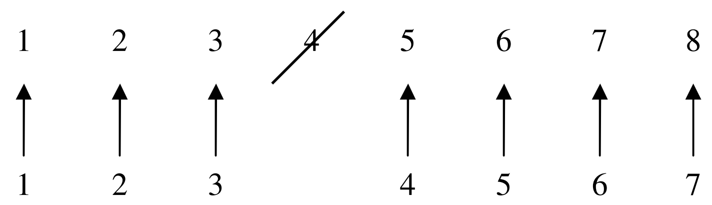


Abbildung 1.12: Order-irrelevance principle

die „eins") entfernen (vgl. Gelman & Gallistel 1978, 217). Trotzdem finden sich Lösungen wie in der Abbildung gezeigt, so dass zumindest von einer allmählichen, zunächst instabilen und kontextgebundenen Entwicklung des Prinzips gesprochen werden kann.

Die Forschungsbefunde sprechen insgesamt gegen ein angeborenes Zählkonzept: Das Zählen basiert nicht auf angeborenen Zählprinzipien, sondern entwickelt sich durch Erfahrungen während der Anwendung des Zählens (vgl. Fuson & Hall 1983; Fuson 1988, 1992a, 1992b). Genetische Grundlage dafür ist vermutlich wie oben gezeigt ein sequenzielles kognitives Schema. Nimmt man an, dass ein solches unabhängig von einem analogen Schema existiert, auf dessen Basis beispielsweise subitizing-Prozesse ablaufen könnten, würde dies die inkonsistenten Befunde zu präverbalen ganzheitlichen und zu präverbalen Aufzählprozessen erklären können (vgl. oben 1.3.1).

Auch wenn der Erwerb von Zählfertigkeiten durch ein entsprechendes sequenzielles Schema vorbereitet ist, bleibt er wesentlich an die Sprache gebunden. Auf dieser Grundlage wird die Zahlwortreihe erworben. Zählen erfolgt dabei zuerst als reine Nachahmung ohne Einsicht in Zählbedeutung und ohne Kenntnis der Zählprinzipien. Nach und nach werden Zählfertigkeiten und -kenntnisse umfassender. Zunächst wird jedoch häufig für jede Zählsituation eine eigene Zählprozedur erworben. Zählen ist also zu Beginn kein abstraktes, auf beliebige Objekte anwendbares Werkzeug, sondern kontextgebunden. Erst eine Generalisierung von Zählvorgängen ermöglicht schließlich den vollständigen Erwerb der abstrakten Zählprinzipien. Und erst die vollständige Verbindung von protoquantitativen und Zählschemata führt zu einem umfassenden Zahlbegriff. Diese Prozesse des Erwerbs, der Elaboration und der Integration von Mengen- und Zählwissen werden nachfolgend als idealtypische Entwicklung dargestellt.

1.4.3 Erwerb und Integration von Zähl- und Mengenwissen

Auf der Basis der in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten Entwicklungsvoraussetzungen und -komponenten soll hier ein Entwicklungsmodell zum Zahlbegriffserwerb vorgestellt werden. Dabei wird es um Erwerb, Elaboration und Integration von Mengenwissen und Zählfertigkeiten gehen. Die Darstellung der Zählentwicklung ab dem Zeitpunkt des Erwerbs von Zahlworten und Zahlwortfolgen stützt sich dabei hauptsächlich auf das Modell nach Fuson (vgl. Fuson et al. 1982; Fuson & Hall 1983; Fuson 1988, 1992a, 1992b), da es in der Literatur große Beachtung und Zustimmung gefunden hat. Die zeitlich davor anzusiedelnden Erwerbsprozesse und Kompetenzen werden diesem Modell vorangestellt. Außerdem wird das Fuson-Modell durch Resnicks (1983; 1989; Resnick et al. 1991) Theorien zu den kognitiven Schemata ergänzt. Bevor das Entwicklungsmodell in dieser Form vorgestellt wird, werden zunächst einige zentrale Aspekte zu Art und Schwierigkeiten des Zahlworterwerbs und zu Anwendungskontexten des Zählens diskutiert.

1.4.3.1 Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe

Die Zahlbegriffsentwicklung stellt sich auf dieser Modell-Basis dar als Lernprozess, dessen Fortschreiten durch Wissens- und Fertigkeitserwerb sowie deren Erweiterung oder Umstrukturierung gekennzeichnet ist. Fuson et al. (1982; auch Fuson 1988) unterscheiden deshalb zwischen einer Phase des Erwerbs und einer der Elaboration der Zahlwortsequenz: Die Zahlwortsequenz muss zunächst gelernt und in gewissem Maße automatisiert sein. Durch deren Anwendung in unterschiedlichen Kontexten wird das Wissen vertieft und erweitert. Erwerbs- und Elaborationsphasen überlappen sich dabei zum Teil, so dass beispielsweise ein kleiner Abschnitt der Zahlreihe bereits elaboriert verfügbar sein kann, andere Abschnitte dagegen noch vollständig erworben werden müssen (vgl. Fuson 1988, 45). Sind Abschnitte der Zahlwortsequenz erworben, werden sie in der Elaborationsphase erweitert um weitere, komplexe neue Kenntnisse, Prozeduren und Anwendungsfelder.

Die Entwicklung zeigt sich also nicht als „alles oder nichts“, sondern erfolgt wellenartig und erstreckt sich nach Fuson im Wesentlichen über fünf qualitativ aufeinander aufbauende Niveaus (Stufen I. bis V.; vgl. ebd.). Eine eindeutige Zuordnung der Kompetenz eines Kindes zu einer Stufe ist dabei jedoch schwierig, weil u.a. neu erworbene, überlegene Kenntnisse, Prozeduren oder Strategien nicht sofort die bisherigen ablösen, sondern zunächst nur kontextgebunden und parallel zu den alten Kompetenzen eingesetzt werden. Der Erwerbsprozess umfasst insgesamt eine zeitliche Spanne etwa vom vierten bis zum siebten oder achten Lebensjahr.

Mit dem Erwerb der Zahlwortreihe sind zunächst grundsätzliche, jedoch bereits komplexe Anforderungen verbunden: So sind die Zahlwörter in jeder Sprache beliebig, da sie keine Ähnlichkeit mit den zu zählenden Objekten aufweisen und keinerlei Hinweis auf die jeweils zugehörige Menge geben. Für Zählanfänger bedeutet dies, zunächst sinnlose Wortfolgen auswendig lernen zu müssen. Dieses Lernen beginnt bereits sehr früh, stellt jedoch noch eine rein syntaktische Leistung dar ohne semantischen Bezug. Allerdings werden Zahlwörter dann schon als besondere Wörter erkannt und können von Nicht-Zahlwörtern unterschieden werden. Eine erste Unterscheidung zeigt sich beispielsweise darin, dass Kinder die Zahlwortreihe aufsagen, ohne diese mit Nicht-Zahlwörten zu vermischen, dabei jedoch noch eine fehlerhafte Reihenfolge wählen: „eins, zwei, fünf, vier, sieben,…“ (vgl. Gerster & Schultz 2000, 328). Ausgehend von diesen ersten auswendig gelernten Zahlnamen ohne Bedeutungsgehalt muss das Konstruktionsprinzip der Zahlwortbildung begriffen werden, um Zahlen höherer Zahlenräume nach dieser Regel eigenständig konstruieren zu können. Dabei müssen sprachspezifische Unregelmäßigkeiten der Zahlwortbildung wie „elf“ und „zwölf“ auswendig gelernt werden. Für die Zahlen von 13 bis 99 gilt dann die Regel: Erst die Einer, dann der Zehner („drei-zehn“, „drei-und-zwanzig“ etc.) (vgl. ebd.).

Bevor weitere Einsichten und Zählkompetenzen erworben werden können, muss also die Zahlwortreihe zunächst als korrekte **Sequenz** zur Verfügung stehen.

Die Zähl*bedeutung* wird erst später allmählich erkannt, wenn beim **Zählen von Objekten** die (korrekt gebildete) Sequenz auf Objekte angewandt wird und dies noch etwas später dann zum Zweck der Bestimmung der Gesamtanzahl einer Menge erfolgt. Damit ist noch nicht automatisch auch die **kardinale Bedeutung des Zählens** erfasst, die Einsicht also, dass ein Zahlwort die Mächtigkeit einer Menge beschreibt. Zahlen kommt also in Abhängigkeit vom jeweiligen Kontext unterschiedliche Bedeutung zu. So wird *ein* Zahlwort zunächst als *mehrere* kontextabhängige Worte mit je unterschiedlicher Bedeutung gelernt, wobei die unterschiedlichen Bedeutungsaspekte allmählich aufeinander zu beziehen und zu einem geschlossenen Begriff zu integrieren sind (vgl. Fuson & Hall 1983, 49). Erklärungen unterschiedlicher Zählentwicklungsniveaus sind danach nur sinnvoll, wenn die verschiedenen Zählkontexte beachtet werden, da nur in Bezug zum jeweils geltenden Kontext die Anforderung erkannt und das Handeln des Kindes bewertet werden können. Aebli führt bezüglich des Mathematikunterrichts in seiner ‚Psychologischen Didaktik’ aus:

> „Der unerfahrene Erzieher glaubt vielleicht, der Erwerb sei vollzogen, wenn die Schüler fähig sind, Aufgaben zu lösen, welche die fraglichen Begriffe und Rechenverfahren einschließen. Oft kann ihm das gänzliche Versagen der Klasse vor einer Aufgabe, die in ungewohnter Form gestellt wird, enthüllen, daß sich die Kinder den Begriff selbst nicht angeeignet haben und daß sie einfach einen ‚Kunstgriff’ benützen.“ (Aebli 1963, 14f.)

In diesem Sinne sind z.B. Zählfertigkeiten der Kinder genau zu untersuchen. Häufig wird aus gezeigtem Zählverhalten auf vollständige Zählkompetenz einschließlich der Einsicht in die kardinale Bedeutung des Zählens geschlossen, obwohl die Kinder viele Aspekte der Zählentwicklung noch nicht erworben haben.

Fuson (Fuson et al. 1982; Fuson & Hall 1983; Fuson 1988) stellt ein ausführliches Modell der Zählentwicklung vor, aus dem die unterschiedlichen Zählkontexte und -niveaus hervorgehen. Fuson & Hall (1983, 50) unterscheiden die Kontexte „sequence, counting, cardinal, measure, ordinal, and nonnumerical contexts“. Letzterer Kontext umfasst z.B. die Verwendung von Zahlen für Telefonnummern, Hausnummern etc. Drei dieser Kontexte bezeichnet Fuson (1992b, 127) als mathematische Kontexte: Dazu gehören der kardinale Kontext, innerhalb dessen sich ein Zahlwort auf die Anzahl einer Menge von Objekten bezieht, des Weiteren der ordinale Kontext, innerhalb dessen sich ein Zahlwort auf ein Element innerhalb einer total geordneten Reihe bezieht und dessen relative Position beschreibt (z.B.: das *zweite* Bonbon) und schließlich der Maßzahlkontext, innerhalb dessen sich ein Zahlwort auf eine kontinuierliche Menge bezieht und die Anzahl der darin enthaltenen Einheiten beschreibt.

Mit dem Ordinalzahlaspekt werden häufig unterschiedliche bzw. mehrere Aspekte undifferenziert bezeichnet – nämlich sequenzielle, Zähl- und Ordinalzahlaspekte gleichermaßen. Ein ordinal gebrauchtes Zahlwort ist allerdings nur im Kontext einer total geordneten Reihe sinnvoll, da es sich dort auf Ordnungsrelationen bezieht. Die Kontexte ‚Sequenz’ und ‚Zählen’ stellen kulturell vermittelte Werkzeuge dar, die es ermöglichen, Zahlworte in kardinalen, ordinalen oder Maßzahlkontexten korrekt einzusetzen (vgl. ebd.). Die zunächst schlichte und bedeutungslose Zahlwortreihe (Sequenz) wird im Verlauf ihrer Verbindung und Integration mit Zähl- und kardinalen Zahlbedeutungen zu dem ersten konzeptionellen Zugang (Werkzeug) zu Addition und Subtraktion: „This sequence eventually becomes an embedded, seriated, cardinalized, unitized, numerical sequence.“ (ebd., 149).

Für die Untersuchung der frühen Zählentwicklung sind zunächst die Bedeutungsdimensionen ‚Sequenz’, ‚Zählen’ und ‚kardinale Bedeutung des Zählens’ zentral:

1. **Sequenz**: Bevor Objekte gezählt werden können, muss die Zahlwortreihe korrekt produziert werden können; darum wird „sequence context“ auch als „recitation context“ bezeichnet (vgl. ebd., 127; 131). D.h., die Zahlwortfolge wird hier (in individuellem Umfang) beherrscht, wird aber noch nicht zum Zählen von Objekten benutzt, sondern zunächst nur als weitgehend bedeutungslose Wortfolge aufgesagt: „In a sequence context, number words occur in their conventional sequence and no external entities are referred to by users of such words.“ (Fuson & Hall 1983, 50). Dabei kann das Kind Zahlworte von Nicht-Zahlwörtern unterscheiden und hat eine Vorstellung von der richtigen Reihenfolge (allerdings kann die Stabilität auf kurze Zahlwortrei-

henabschnitte begrenzt und in höheren Zahlenräumen noch nicht vorhanden sein, ebenso können sprachliche Unregelmäßigkeiten zeitweise Schwierigkeiten bereiten; vgl. dazu oben; Gerster & Schultz 2000, 328).

Auch wenn die beherrschten Zahlwortabschnitte allmählich erweitert werden, sind bestimmte Einsichten auf dieser Ebene noch nicht möglich: Fuson & Hall (1983, 54) beschreiben die Fähigkeit von 4½- bis 6-jährigen Kindern, den systematischen Aufbau der Zahlen von 1 bis 9 auf alle Zehner übertragen zu können, ohne jedoch schon über echtes Verständnis des dekadischen Systems zu verfügen, da die Zehner nicht in der richtigen Reihenfolge zitiert werden könnten. Kinder verwenden also bereits höherwertige Zahlworte bevor sie die dekadische Struktur des Zahlensystems verstanden haben.

Das Aufsagen der Zahlwortreihe und das Zählen von Objekten werden im Alltag häufig synonym als ‚Zählen' bezeichnet. Für eine differenzierte Sicht der Zählentwicklung ist jedoch gerade diese Unterscheidung von großer Bedeutung, da jeweils unterschiedliche Anforderungen damit verbunden sind. Die sequenziellen Fertigkeiten werden allmählich ausgebaut und in anderen Kontexten zum Zählen von Objekten und zum Bestimmen der kardinalen Bedeutung von Objektmengen verwendet:

2. **Zählen** (vgl. u. Abb. 1.13): Durch die Anwendung der Zahlwortsequenz auf Objekte kann gezählt werden. Bei diesem Auszählen wird eine vorgegebene Menge vollständig gezählt, indem jedem Element ein Zahlwort zugeordnet wird („one-one principle"; vgl. 1.4.2), oft begleitet von Zeigen (vgl. Fuson & Hall 1983, 55). Eine korrekte Koordination der beteiligten Komponenten ‚Zahlwort' – ‚Zeigen' – ‚Zählobjekt' gelingt etwa ab einem Alter von 3½ Jahren (vgl. Fuson 1988, 89). Auf frei bewegliche Zählobjekte kann die Zahlwortreihe zudem nicht allein in Verbindung mit Zeigen, sondern auch durch Wegschieben angewandt werden. Dabei unterscheidet das Kind zwischen gezählten und noch nicht gezählten Objekten. Unter Bezug auf Befunde von Briars & Siegler (1981) betonen Fuson & Hall die Bedeutung des Zeigeverhaltens für das Verständnis des Zählprozesses:

> „[…] indicate that pointing is an important part of children's conception of counting and that a developmental progression may exist in which children first consider that correct counting requires a three-way one-to-one correspondence among a word, an entity, and a point, and only later understand that it is the derived word-entity correspondence that in fact is crucial to a correct count." (Fuson & Hall 1983, 56).

Mit zunehmendem Alter wird der Zeigeprozess während des Zählens internalisiert sowie die Zahlwortreihe auf abstrakte Zählobjekte angewandt. An dieser Stelle sei auf die in 1.4.2 erläuterten fünf Zählprinzipien nach Gelman & Gallistel (1978) verwiesen: Nur wenn das „one-one principle“ bekannt ist, kann das Kind durch 1-zu-1-Zuordnung zwischen einzelnem Zahlwort und einzelnem Zählobjekt seine Zahlwortreihe korrekt auf eine Objektmenge beziehen; dabei gewährleistet das „stable order principle“ eine korrekte Rezitation der Zahlwortfolge; das „abstraction principle ist insofern nur zum Teil vorhanden bzw. noch nicht unbedingt erforderlich, als die Anwendung der Zahlwortreihe auf abstrakte Objektmengen erst mit wachsendem Alter möglich wird (vgl. Fuson & Hall 1983, 56). Das Kardinalprinzip muss in diesem Kontext differenziert betrachtet werden: Angewendet als „last-word-rule“ ermöglicht es dem Kind zwar die Beantwortung der Frage „Wie viele?“, dies kann allerdings lange Zeit auf einer rein mechanischen bzw. ausschließlich Verhalten nachahmenden Ebene ohne Verständnis von Kardinalität erfolgen. So zeigte Wynn (1990) in Experimenten, dass Kinder die „last-word-rule“ vermutlich zunächst durch Nachahmung lernten und wüssten, dass das letztgenannte Zahlwort für den Zählprozess in irgendeiner Weise von Bedeutung sei, ohne gleichzeitig zu wissen, *weshalb* diese Regel wichtig sei: In ihren Experimenten sollten Kinder eine vorgegebene Anzahl an Spielzeugtieren auszählen und anschließend diese ausgezählte Anzahl durch erneutes Zählen überprüfen, z.B.: „Can you count and make sure there are two?“ (Wynn 1990, 171). Dabei antworteten die Kinder häufig mit der gewünschten Kardinalzahl (z.B. „give five“), auch wenn sie eine abweichende Anzahl vorgelegt hatten (z.B. 3), und zählten entsprechend z.B.: „One, two, five.“ (ebd., 178). So stellt auch Fuson (1992b, 133) fest: „When young children first begin counting, the counting does not have a cardinal result. They count only to imitate the social-cultural counting activity.” Die Verfügbarkeit über ein vollständiges Kardinalitätskonzept erfordert sowohl die einsichtige (!) Bewältigung der Anforderung „Wie viele sind es?“ als auch der Anforderung „Gib mir 4 Bonbons.“. Ersteres erfordert *aus*zählende und letzteres erfordert *ab*zählende Zählvorgänge (s. Punkt 3).

3. **Kardinale Bedeutung des Zählens** (vgl. Abb. 1.13): In einem kardinalen Kontext beschreibt das Zahlwort die Mächtigkeit („manyness“; Fuson & Hall 1983, 58) einer Anzahl von Objekten oder Ereignissen. Die Elemente einer Menge sind in einem kardinalen Kontext diskret, also voneinander unterscheidbare Einheiten (vgl. Fuson 1988, 5).

   Zunächst unterschiedliche, erfahrungs- bzw. kontextgebundene Bedeutungszuweisungen beispielsweise zum Zahlwort ‚zwei’ müssen allmählich abstrahiert werden zu einem generellen Konzept von ‚Zweiheit’ (vgl. Fuson & Hall 1983, 58). Fuson &

Hall (ebd.) betonen in diesem Zusammenhang, dass dabei nicht von einem allgemeingültigen Entwicklungsweg zu abstrakten Anzahlkonzepten ausgegangen werden darf, sondern dass durchaus unterschiedliche Zugänge möglich sein können. Sie nehmen an, dass sowohl Zählen als auch subitizing als Zugänge in Abhängigkeit von individuellen Erfahrungen möglich sind und dass deren Verhältnis komplexer als häufig postuliert sein müsse (vgl. ebd., 60). Die erste kardinale Verwendung von Zahlworten bezieht sich immer auf kleine Anzahlen, wobei dies – unabhängig davon, ob Zählen oder subitizing als Zugang betont wird – allerdings noch keineswegs bedeutet, dass das Kind sich schon dessen bewusst ist, dass die Kardinalzahl, also die *An*zahl eine immanente Eigenschaft *aller* Mengen ist (vgl. ebd., 61). Viele Kinder beginnen früh, spezifische Situationen, Anordnungen, Muster etc. mit ‚kardinalen Etiketten' zu kennzeichnen („There are five people in my family."; Fuson 1992b, 131).

Obwohl die genaue Entwicklung kardinalen Verständnisses unklar ist, lassen sich einige Entwicklungsschritte des Zählens nachzeichnen, die eine Entwicklung vom Zählen als *Aus*zählen zu einem Zählen als *Ab*zählen vermuten lassen. In Anlehnung an Fuson (1988, 262) werden die zentralen Einsichtsprozesse in Abbildung 1.13 dargestellt.

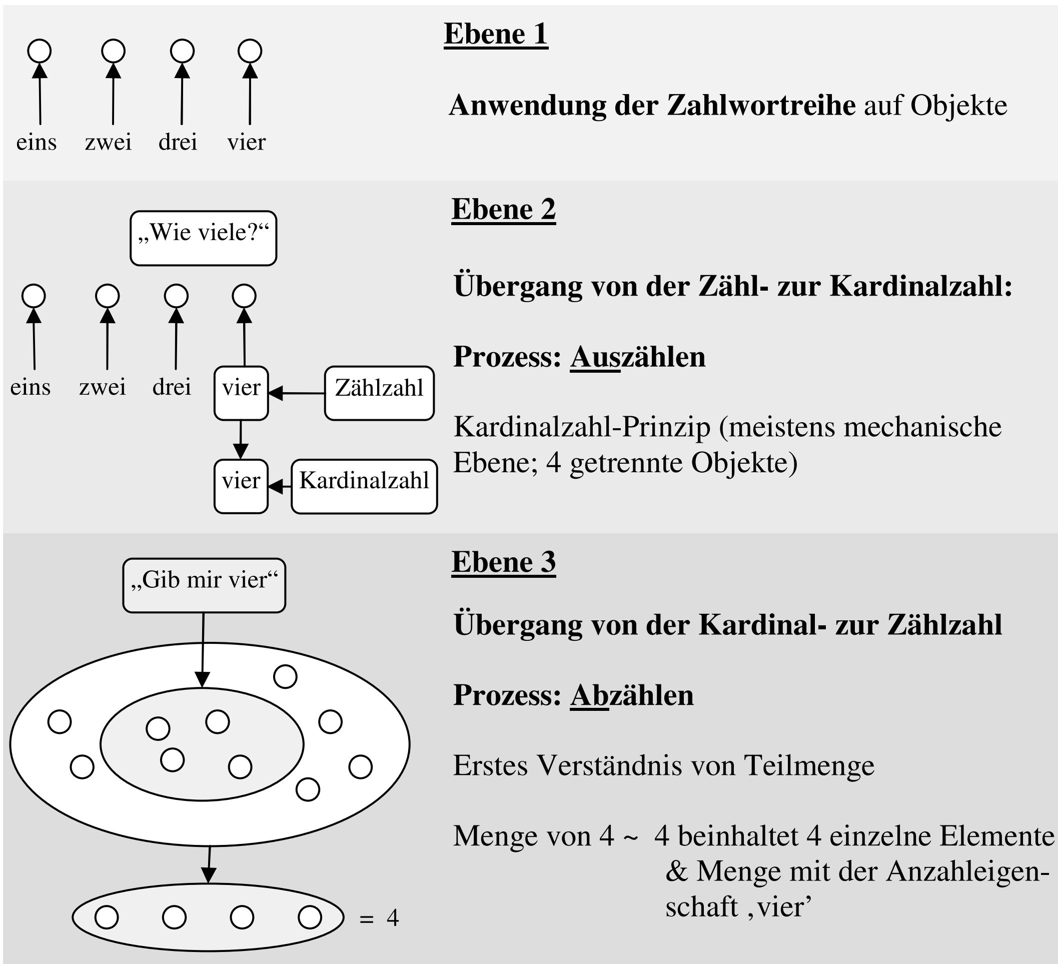


Abbildung 1.13: Entwicklung kardinaler Zählbedeutung

Auf **Ebene 1** wird die Zahlwortreihe ohne kardinales Verständnis auf Objekte angewandt. Bei *Aus*zählsituationen auf **Ebene 2** wird eine vorliegende Gesamtmenge vollständig gezählt, wobei jedem Element ein Zählwort zugeordnet wird. Eventuell kann das letztgenannte Zahlwort bereits als Kardinalwert der gezählten Menge genutzt werden. Bei diesem Prozess sind die aufeinander aufbauenden Komponenten ‚Zählvorgang' und ‚Ergebnis' (Anzahl) zu unterscheiden: Der einsichtige Erwerb des Kardinalprinzips (last-word-rule) als erster Schritt zur Integration von Zählzahl und Anzahl scheint qualitativ unterschiedliche Komponenten zu umfassen; er erfolgt häufig in zwei Abstufungen (vgl. Fuson & Hall 1983; Fuson 1988): Auf einer ersten Stufe wird eine simple Beziehung noch ohne kardinale Einsicht verstanden bzw. nachgeahmt: „Count and give the last count word when asked ‚How many Xs are there?'" (Fuson 1988, 208). Als Anzeichen fehlender kardinaler Einsicht gelten das erneute Zählen einer bereits gezählten Menge auf die Frage „Wie viele?", das Nennen eines abweichenden Zahlwortes, das Aufsagen einer weiteren (anderen) Zahlwortsequenz oder das Antworten mit dem letztgenannten Zahlwort ohne jedoch damit die Anzahl zu meinen (vgl. Fuson 1992a, 62f.; 1992b, 134). Fuson nennt ein für letzteren Aspekt typisches Beispiel: Eine Menge von fünf Autos wird gezählt, es wird nach der Anzahl gefragt („Wie viele?") und das Kind zeigt auf das zuletzt gezählte Auto und antwortet „This is the five cars." (Fuson 1992a, 63).

Eine elaboriertere Stufe des „last-word responding" stellt die Übertragung des Zahlwortes auf das Kardinalwort dar. Diese Übertragung bezeichnet die *Absicht* des Kindes, seine Antwort auf die Frage „Wie viele?" auf die Menge als Gesamtheit zu beziehen, also die Kardinalität der gesamten Menge anzugeben (vgl. Fuson 1988, 208). Dabei vollzieht es eine Verschiebung von der während der Zuordnung der rezitierten einzelnen Zahlworte zu den Objekten okroyierten Zählbedeutung auf das letztgenannte Zahlwort zu einer kardinalen Bedeutung dieses letztgenannten Zahlwortes (vgl. Fuson & Hall 1983, 66; Fuson 1988, 208). Die *Zähl*bedeutung des letztgenannten Zahlwortes muss also umgewandelt werden in eine *kardinale* Bedeutung. Wird diese Übertragung bewältigt, sind die Antworten auf die Frage „Wie viele?" nicht mehr bedeutungsloses Anwenden der last-word-rule, sondern stellen eine kardinale Interpretation des letztgenannten Zahlwortes dar. Wird das Kardinalzahlprinzip mit der *Intention* der Anzahlbestimmung eingesetzt, findet also ein erster Übergang von der Zähl- zur Kardinalzahl statt. Dieser Übergang ermöglicht die Ent-

wicklung von Verständnis für die Äquivalenz von Zahlen und für einfache Addition (und später für einfache Subtraktion) (vgl. Fuson 1992b, 134).
Um zu verdeutlichen, dass auf dieser Ebene noch kein vollständiges Verständnis von Kardinalität erreicht ist, kann die Zahlreihe durch eine Reihe von Symbolen, Silben oder Buchstaben ersetzt werden, so dass mit dem einzelnen Element kein sinnvolles Mengenverständnis verbunden werden kann (Kinder auf dieser Ebene nehmen die Zahlwortfolge auf genau diese Weise wahr; dies ist für Erwachsene, die diese Entwicklungsprozesse seit langem verinnerlicht haben, häufig schwer nachzuvollziehen): Beispielsweise kann versucht werden, mit dem Alphabet oder mit AL-LE-MEI-NE-ENT-CHEN zu zählen; dabei steht jede Silbe für ein Zahlwort. So können Erwachsene annäherungsweise selbst die Schwierigkeiten erleben, die für Zählanfänger typisch sind. Lautet die Aufgabenstellung dann beispielsweise „Zähle dies. Wie viele sind es?“, kann sehr simpel als Antwort „CHEN“ gegeben werden; diese Antwort umfasst jedoch noch keineswegs das Verständnis, dass CHEN auch gleichzeitig alle ‚vorhergehenden’ Objekte AL, LE, MEI, NE, ENT sowie CHEN umfasst. Auch könnte nicht ohne weiteres beantwortet werden, welche *Menge* mit MEI wohl gemeint sein könnte, wie viele zwischen LE und NE liegen oder um wie viele MEI mehr ist als AL. Das Verständnis, dass das zuletzt genannte Zahlwort sich zum einen nicht nur auf dieses Objekt bezieht, sondern zugleich die gesamte Menge der gezählten Objekte umfasst, erfordert also mehrere Einsichten und wird nicht einfach durch das Lernen der „last-word-rule“ erreicht. Diese Zählkompetenz stellt daher lediglich einen Prozess des *Aus*zählens ohne vollständiges kardinales Verständnis dar.
Bei *Ab*zählsituationen auf **Ebene 3** kann eine vorgegebene Anzahl aus einer Menge heraus abgezählt werden. Hier sind in jedem Fall erste kardinale Einsichten Voraussetzung, da die Zahlvorgabe als Kardinalwert interpretiert und dann wieder in eine Zählbedeutung umgewandelt werden muss. Dieser Übergang von der Anzahl zur Zählzahl wird später bewältigt und erfordert mehr Anstrengung (vgl. Fuson & Hall 1983, 66). Zählwissen und Kardinalzahlprinzip integriert führen so zu einem tieferen Mengenverständnis: Beispielsweise bezogen auf die Menge 4 bedeutet das zum einen, dass diese Menge vier einzelne Objekte beinhaltet, denen zusammen die Anzahleigenschaft ‚4’ (vgl. Gerster & Schultz 2000, 332f.) zugeordnet werden kann; darüber hinaus bedeutet dies, dass aus einer größeren Menge die Teilmenge ‚4’ *ab*gezählt werden kann: Das Kind kann erst mit diesem Verständnis Aufforderungen der Art „Gib mir 4 Bonbons.“ umsetzen. Dabei wird die vorgegebene Kardinalzahl

„vier" umgewandelt in ihre Zählbedeutung „vier", so dass aus der Menge so viele Objekte wie vorgegeben abgezählt werden können: „Eins, zwei, drei, vier." Dieser Prozess erfordert auch die Fähigkeit, das Zählziel „vier" während des Zählens zu behalten, um bei der Zielzahl anhalten zu können (vgl. Fuson 1992b, 134).

Mit diesem Wissen können beispielsweise bereits Subtraktionsaufgaben folgender Art gelöst werden: *Connie hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Jim 3 Murmeln ab. Wie viele Murmeln hat sie nun noch?* (vgl. Fuson 1992a, 64). Aus der Ausgangsmenge (8) heraus können 3 abgezählt werden („cardinal-to-count transition") und die Restmenge kann ausgezählt und deren Kardinalwert als Antwort gegeben werden („count-to-cardinal transition") (s. auch weiter unten die Aufgabenbeispiele). Auf dieser Basis wird verstanden, dass eine Menge eine bestimmte Mächtigkeit hat, welche zusammengesetzt ist aus einzelnen Einheiten. Diese Einsicht beinhaltet damit auch die Übertragbarkeit des protoquantitativen Teile-Ganzes-Verständnisses (vgl. 1.4.1) auf Zahlen. Durch die *einsichtige* Verwendung des Zählprinzips ‚Kardinalzahl-Prinzip' wird echtes Mengenverständnis erreicht. Damit wird dieses Zählprinzip in der Tat zu einem besonderen.

Als alternative Möglichkeiten der kardinalen Einsichtsbildung werden u.a. der Erwerb über implizit verfügbare Zählprinzipien („how-to-count principles"; vgl. 1.4.2) und der Erwerb über das Verbinden von subitizing und Zählen diskutiert (vgl. Fuson & Hall 1983; Fuson 1988). Vermutlich gibt es jedoch nicht eine einzige richtige Position, da Kinder individuell unterschiedliche Zugänge bevorzugen (vgl. ebd., 209, 245).

Anhand der vorgestellten Gliederung in zentrale, aber sehr unterschiedliche Prozesse bzw. Kontexte von Zählvorgängen – ‚Sequenz', ‚Zählen von Objekten', ‚kardinale Bedeutung des Zählens' – soll im folgenden Kapitel auf der Basis von Fusons Modell zu Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe (vgl. Fuson et al. 1982; Fuson & Hall 1983; Fuson 1988; 1992a; 1992b) ein Entwicklungsmodell zum Zahlbegriffserwerb vorgestellt werden. In Fusons Modell sind verschiedene sequenzielle „Level" dargestellt, denen Zähl-, kardinale, ordinale und Maßzahlkontexte zugeordnet werden. Die fünf Entwicklungsstufen der Elaborationsphase der Zählentwicklung sind danach (vgl. Fuson 1988, 50ff.; Abb. 1.14):

I. String Level oder ganzheitliche, undifferenzierte Zahlwortsequenz.

II. Unbreakable List Level oder unflexible Zahlwortsequenz.

III. Breakable Chain Level oder teilweise flexible Zahlwortreihe.

IV. Numerable Chain Level oder flexible Zahlwortreihe mit numerischer Bedetung.

V. Truly Numerical Counting oder vollständig reversible Zahlwortreihe.

Zur graphischen Darstellung dieses Modells zur Zählentwicklung wurde die Abbildung aus Fuson (1992a, 98; s. auch Fuson 1992b, 141) gewählt, da diese im Vergleich zu den Abbildungen in Fuson et al. (1982), Fuson & Hall (1983) und Fuson (1988) bei inhaltlicher Übereinstimmung übersichtlicher ist (vgl. Abb. 1.14).

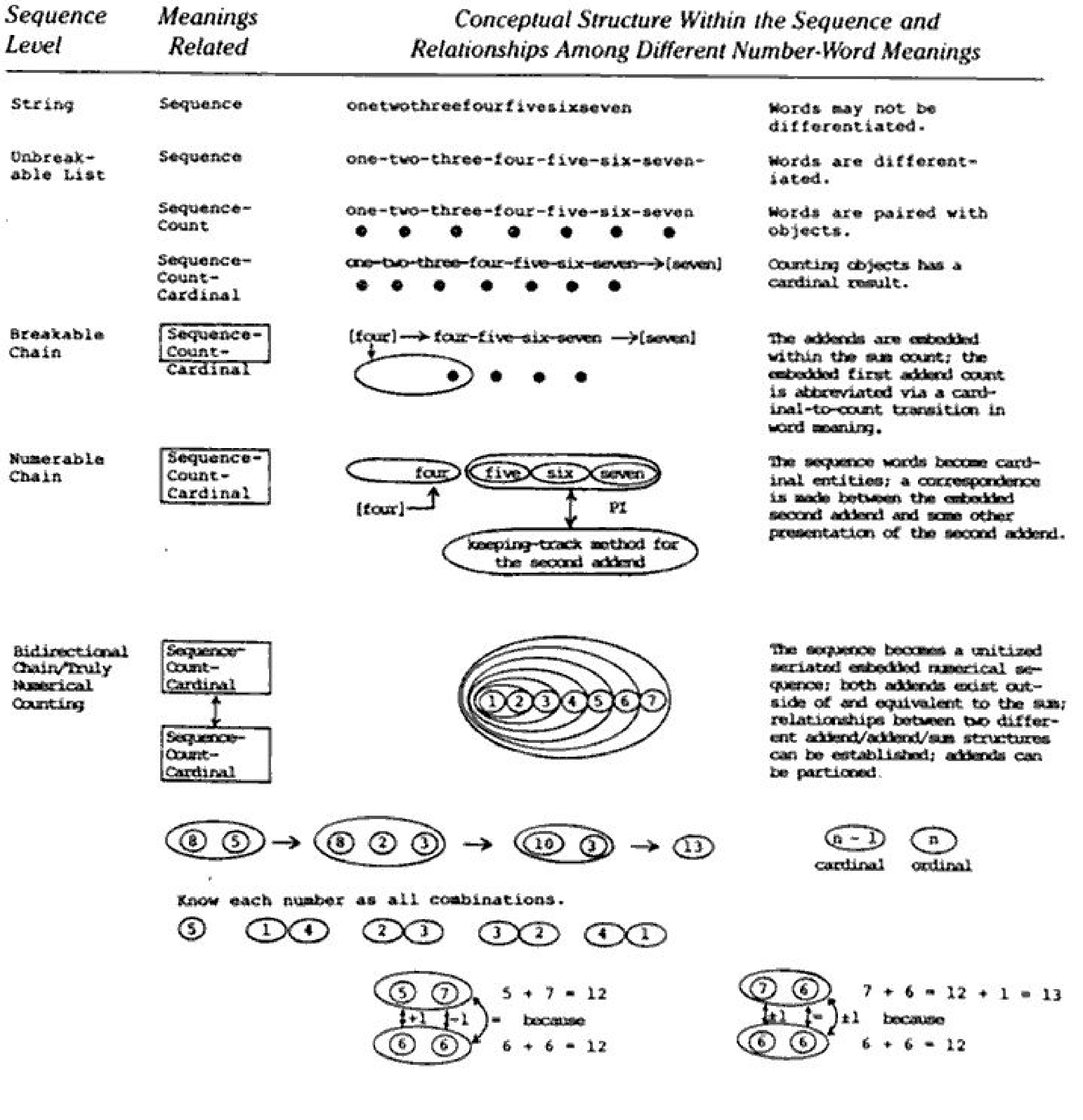


Abbildung 1.14: Fusons Modell zu Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe (dort entnommen 1992a, 98)

Die (idealtypischen) Eckpunkte der Zählentwicklung stellen sich nach Fuson (1988, 57) folgendermaßen dar: Die meisten Kinder unter 3½ Jahren beginnen die Zahlwortfolge bis 10 zu lernen, bis zu einem Alter von etwa 4½ Jahren wird dann die Reihe von 10 bis 20 dazugelernt, wobei viele Kinder noch bis zu einem Alter von etwa 6 Jahren große Schwierigkeiten mit den Zahlworten von 14 bis 20 haben. Andere lernen wiederum in diesem Alter bereits die Zehner von 20 bis etwa 70. Etwa die Hälfte aller Schulanfänger erwirbt die Zahlwortsequenz bis 100.

Die Zählentwicklung umfasst jedoch weit mehr als das Erlernen der korrekten Zahlwortfolge und weist weit darüber hinaus, da verschiedene Bedeutungsdimensionen integriert werden müssen. Die Anwendung der erlernten Zahlwortfolge führt daher zu neuen, zunehmend komplexeren Fähigkeiten. Im Verlauf der fortschreitenden Entwicklung werden die Aspekte ‚Sequenz', ‚Zählen' und ‚kardinale Bedeutungen' immer mehr miteinander in Beziehung gesetzt und erfahren allmählich eine Integration zu einem Zähl- und Kardinalzahlvorstellungen umfassenden Zahlbegriff. Dabei durchläuft die Zahlwortsequenz eine Entwicklung von der zunächst auswendig gelernten, bedeutungslosen Zahlwortreihe über das Verständnis der Zahlworte als Repräsentanten von Objekten innerhalb eines Zählvorgangs bis zum kardinalen Verständnis der Zahlworte und kann so mit zunehmender prozeduraler Sicherheit in wechselnden Zählsituationen angewendet und mit konzeptueller Bedeutung angereichert werden. In welcher Weise neue Stufen erreicht werden, also die Frage nach der Art konzeptuellen Wechsels ist unklar, eine Beteiligung sowohl von Reifungsprozessen als auch von Lernprozessen scheint für Fuson (1988, 56f.) unter Bezug auf Case (1985a, 1985b) wahrscheinlich zu sein. Art und Umfang sowie Anwendung von bestimmten Zählfertigkeiten hängen damit auch von äußeren Faktoren wie der schulischen Vermittlung ab. Ebenso wie Resnick (1983) misst auch Fuson (1988) der *Erprobung* und den *Lernbedingungen* und *-möglichkeiten* also große Bedeutung bei.

Obwohl sich die entsprechenden Befunde auf englischsprachige Kinder beziehen, sind die mit dem Erwerb von Zahlwortsequenzen einhergehenden Entwicklungsstufen auf andere Sprachräume übertragbar, da die Grundstrukturen nicht von sprachlichen Besonderheiten abhängen. So konnten diverse Studien in anderen Sprach- und Kulturkreisen dort ähnliche Entwicklungsverläufe nachweisen (vgl. Fuson 1988, 56).

1.4.3.2 Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung

Für das nachfolgend vorgestellte Entwicklungsmodell des Rechnenlernens werden die Entwicklungslevel nach Fuson erweitert um die zeitlich vor dem Erwerb erster Zahlworte liegenden Kompetenzen und ergänzt durch Resnicks (1983; 1989; Resnick et al. 1991) Theorien über die den einzelnen Kompetenzen zugrunde liegenden Strukturen und prozeduralen Komponenten (die verschiedenen Integrationsstellen von protoquantitativen Schemata mit den anwachsenden Zählschemata werden beschrieben). Diese Zusammenführung und Interpretation führt zu einem anderen, erweiterten Modell mathematischer Kompetenzentwicklung bestehend aus insgesamt acht Stufen.

Weitere Entwicklungsaspekte wie z.B. Einsicht in das Stellenwertsystem, komplexe Rechenstrategien oder Multiplikation bauen darauf auf, werden jedoch an dieser Stelle nicht einbezogen, da hier die frühen Entwicklungsprozesse im Mittelpunkt stehen. Nachfolgend werden die einzelnen Stufen des Entwicklungsprozesses überblicksartig aufgelistet, in einer Graphik (s. Abb. 1.15) dargestellt und anschließend ausführlich erläutert:

0. Pränumerische sequenzielle und analoge Kompetenzen (statische Vergleiche)

1. Ganzheitliche Zahlwortsequenz (ZWS) & Vergleich statisch und dynamisch

2. Differenzierte, unflexible ZWS & Verbindung ZWS mit protoquantitativem Vergleichsschema

3. Verbindung von ZWS & Vergleichsschema mit Vermehren / Vermindern auf quantifizierender Ebene

4. Integration von ZWS, Vergleichsschema & Vermehren / Vermindern auf Zahlebene

5. Verbindung ZWS mit dem Teile-Ganzes-Schema auf quantifizierender Ebene

6. Verbindung Vermehren/Vermindern mit dem Teile-Ganzes-Schema auf quantifizierender Ebene: Kompensation & Kovarianz

7. Verbindung Vermehren/Vermindern mit dem Teile-Ganzes-Schema auf Zahlebene

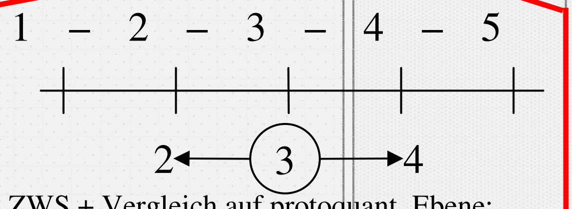
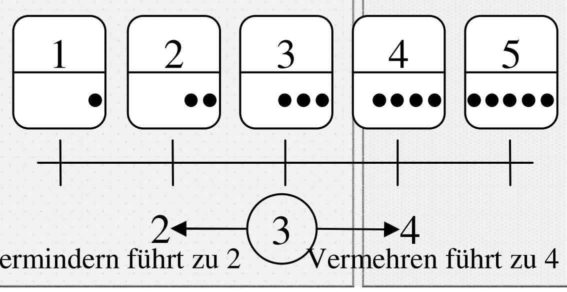
	ZÄHLSCHEMA (digital-sequenziell)	MENGENSCHEMATA (analog-räumlich): Vergleich	MENGENSCHEMATA (analog-räumlich): Vermehren / Vermindern	MENGENSCHEMATA (analog-räumlich): Teile-Ganzes
0.	Sequenzen (Kernprinzip Reihung): Verständnis von z.B. Handlungssequenzen (ab Säuglingsalter)	Protoquant. Ebene: statischer Vgl: gleich / ungleich (Kernprinzip 1-zu-1-Zuordnung) (Säuglinge); verbal: viel / wenig (< 2 Jahre)		
1.	123456	Protoquant. Ebene: statischer Vergleich: ‚größer / kleiner'	Protoquant. Ebene (präverb.) dynamischer Vergleich bei Mengenveränderungen: mehr als vorher (ab 2-3 Jahre)	
2.	 ZWS + Vergleich auf protoquant. Ebene: sequenzielle Relationen (davor; größer; aber nicht: mehr/weniger im kard. Sinn)		Protoquant. Ebene (verbal): dynamischer Vergleich bei Mengenveränderungen (3-4 Jahre)	Protoquant. Ebene: Wissen über Beziehungen zw. Teilen und einem Ganzen, Klasseninklusion (ab 4-5 Jahre)
3.		Ebene quantifizierter Mengen: größere Menge = größere Zahl	ZWS + Vermehren / Vermindern auf quant. Ebene ⇒ kardinale Relationen (exakte Quantifizierung vermehrender / vermindernder Handlungen)	Protoquant. Ebene: Wissen über Beziehungen zw. Teilen und einem Ganzen, Klasseninklusion

Abbildung 1.15: Integriertes Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung (Fortsetzung nächste Seite)

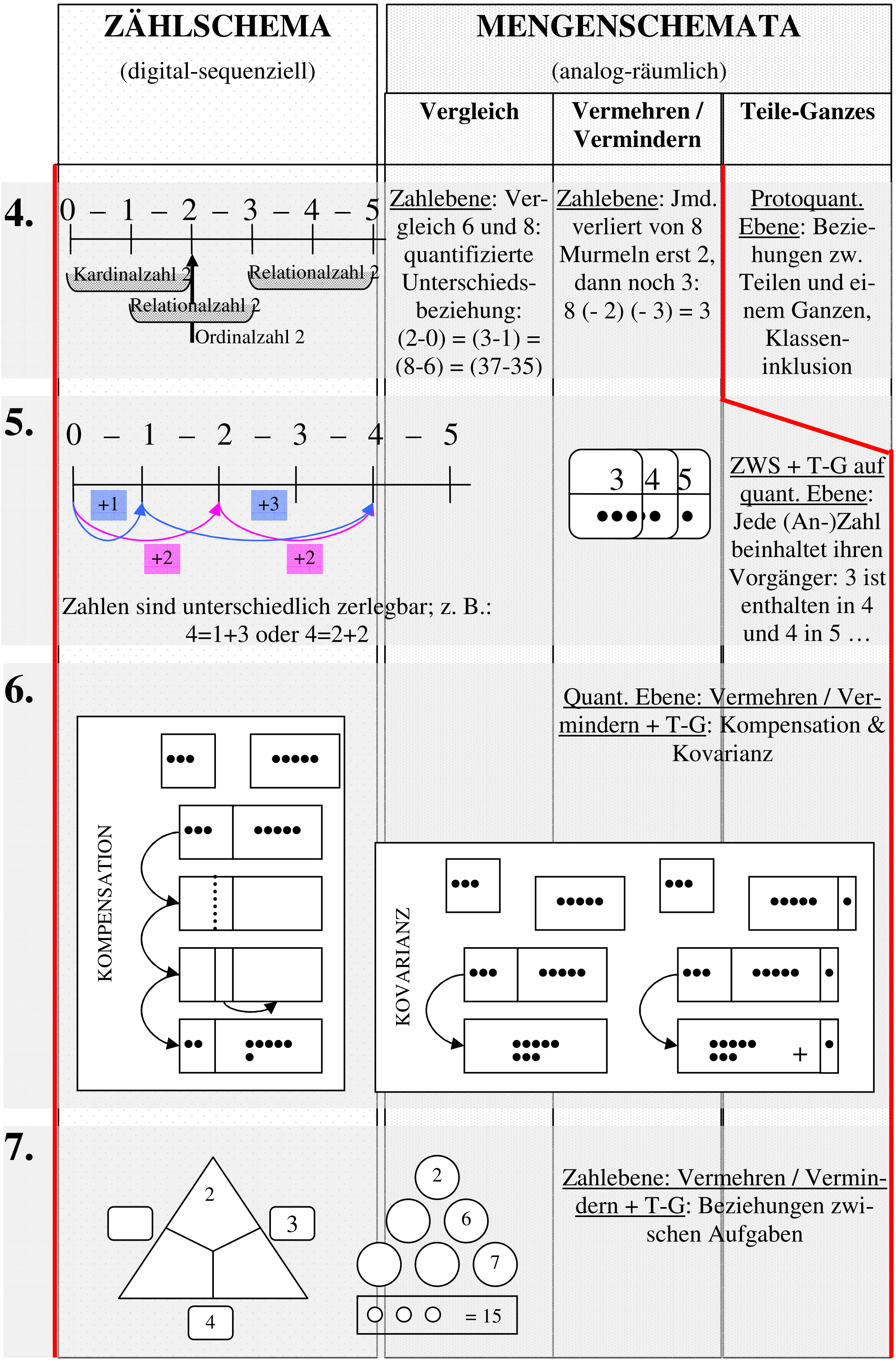


Abbildung 1.15: Integriertes Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung (Fortsetzung von vorheriger Seite)

Stufe 0: Pränumerische sequenzielle und analoge Kompetenzen (statische Vergleiche)

Bis zum Erwerb erster Zahlworte auf Stufe 1 verfügt das Kind wie in 1.3 und 1.4.1 gezeigt über umfangreiche Kompetenzen sowohl sequenzieller als auch analoger Art. Sequenzielles Verständnis raum-zeitlicher Bezüge beruht vermutlich auf dem Kernprinzip der Reihung, die Fähigkeit zur Unterscheidung nach gleich/ungleich auf dem Kernprinzip der 1-zu-1-Zuordnung (vgl. Carey & Spelke 1994, 170).

Säuglinge sind bereits präverbal zu Mengenwahrnehmung, -unterscheidung, -vergleich und -operationen fähig. Auf der Grundlage des protoquantitativen Vergleichsschemas können so statische Vergleiche nach gleich/ungleich bereits präverbal vorgenommen werden. Auf dieser Basis werden Klassifikationsleistungen allgemeiner kognitiver Art möglich (alles Rote, Runde etc. kann z.B. als zu einer Klasse gehörig eingestuft werden). Aber auch spezifisch mathematische Vergleiche der Art ‚mehr' oder ‚weniger' sind auf dieser Grundlage möglich. Mit Beginn der Sprachentwicklung sind schon unter Zweijährige zu verbalen Beurteilungen (rot, eckig, aber auch viel, lang etc.) und schließlich zu Vergleichen (mehr, länger etc.) in der Lage. Vergleichen kann sich also auf allgemeine und auf mathematisch relevante Aspekte beziehen. Ein mathematisch relevanter Aspekt wäre der – noch unpräzise – Vergleich von Mengen. Diese protoquantitative Vergleichsfähigkeit ist Voraussetzung für das spätere numerische Vergleichen von Mengen.

Solche Vergleiche stellen im weitesten Sinne Ungleichheitsbeziehungen dar. Zusammen mit dem bereichsspezifischen Kernprinzip der Reihung ist dies Voraussetzung für den Ausbau sequenzieller Fähigkeiten der Reihenbildung (Seriation).

Stufe 1: Ganzheitliche Zahlwortsequenz & Vergleich statisch und dynamisch

Auf Stufe 1 stehen der Erwerb der Zahlwortsequenz und die Weiterentwicklung der protoquantitativen Fähigkeiten zunächst unverbunden nebeneinander. So werden auf dieser Stufe Vergleichsfähigkeiten weiter ausgebaut: Neben statischen Vergleichen von Mengen befähigt das protoquantitative Schema des Vermehrens und Verminderns zur präverbalen Wahrnehmung der Richtung von quantitativen Veränderungen. Mengenveränderungen durch Vermehren oder Vermindern sind im Gegensatz zu den früheren Vergleichen dynamisch und gerichtet (durch Vermehren wird eine Menge mehr als sie vorher war). Eine Verbalisierung quantitativer Veränderungen ist allerdings erst etwas später mit Drei- bis Vierjährigen möglich und wird Stufe 2 zugeordenet. Diese Alterszuordnungen stellen allerdings nur ungefähre Richtwerte dar und müssen so nicht auf jedes Kind zutreffen. So ist es beispielsweise möglich, dass ein Kind auch schon vor Erwerb entsprechender Kompetenzen der Stufe 2 dynamische und gerichtete Mengenveränderungen verbalisieren kann.

Das protoquantitative Schema des Vermehrens und Verminderns stellt ein intuitives Verständnis einfacher, unidirektionaler Addition und Subtraktion ohne Teile-Ganzes-Verständnis im Sinne von Hinzufügen und Wegnehmen sowie von Mengenerhaltung dar. Dieses Verständnis bleibt auf dieser Stufe jedoch noch protoquantitativ bzw. pränumerisch, da hier noch keine Integration mit der Zahlwortsequenz erfolgt.

Auf dieser elementaren Ebene wird daneben – zum Teil von noch unter 3;6-Jährigen – ein in individuellem Umfang erlernter Zahlwortreihenabschnitt als automatisiertes, zusammenhängendes Wortgebilde rezitiert, ohne dass damit bereits eine spezifische Bedeutung verbunden wäre. Die einzelnen Zahlworte werden nicht voneinander unterschieden. Daher kann die (kontinuierlich zusammenhängende) Zahlwortsequenz auf dieser Ebene noch nicht auf (einzelne, diskrete) Objekte angewandt werden. Das bedeutet jedoch nicht den Ausschluss einer prinzipiellen, vom Zählvorgang unabhängigen Fähigkeit, 1-zu-1-Zuordnungen vorzunehmen (vgl. 1.3).

Die beherrschten Zahlreihenabschnitte können nur in der Vorwärtsrichtung und nur als Ganzes aufgesagt werden: „Einszweidreivierfünf". Sie werden dabei nicht sofort korrekt aufgesagt, sondern entwickeln sich aus fehlerhaften, unstabilen Sequenzen allmählich zu korrekten und stabilen Zahlreihenabschnitten. Fuson (1988, 35ff.) beschreibt drei charakteristische Formen von Zahlwortreihenstrukturen: Während der Erwerbsphase der Zahlwortreihe besteht eine Zählsequenz danach anteilig aus einer korrekten Zahlwortfolge für die ersten Zahlworte, gefolgt von einem stabilen (d.h., kontinuierlich verwendeten) Anteil falscher Sequenzen (z.B.: korrekte Zahlwortfolge: 1, 2, 3, 4, 5 und danach stabile falsche Zahlwortsequenz: 6, 7, 9) sowie einem instabilen Anteil falscher Sequenzen (d.h., wechselnde Zusammenstellung der Sequenz). Diese allmähliche Stabilisierung einer korrekten Zahlwortreihe und deren sukzessive Erweiterung um weitere, zunächst falsche und instabile Abschnitte der Zahlwortsequenz sprechen gegen die Annahme angeborener Zählprinzipien, da das Prinzip der stabilen Zahlreihenfolge (Gelman & Gallistel 1978) im Verlauf der Zählentwicklung aus der Erfahrung abstrahiert und erworben werden muss.

Fuson (ebd., 50) weist darauf hin, dass diese Entwicklungsstufe meistens nicht lange andauert und dass nicht jedes Kind diese Stufe durchlaufen muss, bevor die Zahlwörter auf der nächsten Stufe 2 als unterscheidbare Einheiten aufgefasst werden können.

Stufe 2: Differenzierte, unflexible ZWS & Verbindung ZWS mit protoquantitativem Vergleichsschema

Die nächste Stufe ist erreicht, wenn Zahlworte voneinander unterschieden werden: „Eins-zwei-drei-vier-fünf-sechs“. Dieses Niveau unterteilt Fuson (1992b, 141) in drei unterschiedlich differenzierte Bedeutungsrelationen: „Sequence“, „Sequence-Count“ und „Sequence-Count-Cardinal“.

Auf der ersten Ebene – „Sequence“ – können Zahlworte voneinander unterschieden werden. Allerdings hängen sie immer noch als Sequenz unzertrennlich aneinander. Daher ist auf Stufe 2 noch kein Aufsagen von beliebigen Startzahlen aus möglich, sondern die Zahlreihe kann nur von 1 aus vorwärts rezitiert werden. Daher kann auch noch nicht von einem beliebigen Zahlwort auf das folgende geschlossen werden. Fuson (1988, 50) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass diese fehlende Flexibilität vermutlich nicht auf entwicklungsbedingte Beschränkungen im Kind zurückzuführen ist, sondern auf eine sehr elementare Stufe sequenzieller Lernprozesse hinweist, da beispielsweise auch viele Erwachsene Schwierigkeiten zeigen, z.B. bei der Folge „do re mi fa so la ti do“ von einem beliebigen Wort aus die Folge weiter zu rezitieren. Auch ein flexibles Bewegen vorwärts und rückwärts innerhalb des Alphabets bzw. ein schnelles Bestimmen von ‚Vorgängern’ und ‚Nachfolgern’ einzelner Buchstaben innerhalb der alphabetischen Reihenfolge bereitet noch vielen Erwachsenen Schwierigkeiten: Fuson (ebd., 56) geht davon aus, dass solche nicht-numerischen Sequenzen auf der Ebene von „low-level sequence skills“ beherrscht werden und folgert daraus, dass das Erlernen von Sequenzen allgemein Lernen und ausreichende Erprobung bis zu einer gewissen Automatisierung erfordert, um überhaupt anwendbar zu werden. Auch die Zahlwortsequenz muss daher ausreichend erprobt und verinnerlicht werden, bevor weitere Aspekte und Fertigkeiten hinzukommen können.

In eigenen früheren Studien konnte Fuson zeigen, dass solche Schwierigkeiten auf dieser Stufe durch „running starts“ vermindert werden können, indem man einem Kind anstelle einer einzelnen Startzahl zwei oder drei Zahlworte vorgibt (also beispielsweise: „Zähle von fünf – drei, vier, fünf…?“) (vgl. Fuson et al. 1982).

Aufbauend auf dieser Verfügbarkeit der Zahlwortsequenz wird das Kind dann fähig, die Zahlwortreihe auf Objekte anzuwenden – „Sequence-Count“: Da die Zahlworte hier als eigenständige, voneinander unterscheidbare Einheiten verstanden werden und da hier *bis* zu einer bestimmten Zahl gezählt werden kann (s.u.), wird auf dieser Ebene eine sinnvolle 1-zu-1-Zuordnung zwischen Zahlwort und Zählobjekt möglich.

In der weiteren Bedeutung „Sequence-Count-Cardinal“ kann erste Einsicht in das Kardinalprinzip erworben werden und – zumindest auf einer mechanischen Ebene – eine Anwendung der last-word-rule erfolgen: Durch Wiederholen des letztgenannten Zahlwortes eines Zählvorgangs können Fragen der Art „Wie viele?“ beantwortet werden. Ein solches kardinales Ergebnis des Zählvorganges bedeutet wie oben gezeigt noch kein echtes bzw. vollständiges kardinales Verständnis.

Zählen wird hier im Gegensatz zum später verfügbaren *Ab*zählen (s. Stufe 3) noch unvollständig kardinal als *Aus*zählen praktiziert: Beim Auszählen wird eine vorgegebene Menge vollständig gezählt, indem jedem Element ein Zahlwort zugeordnet wird. Auszählprozesse erfordern sogenannte „count-to-cardinal transitions“ (s.o. Abb. 1.13). Nach Vorgabe eines Kardinalwertes (z.B. „Gib mir vier Bonbons.“) eine entsprechende *Teil*menge aus einer größeren Menge heraus *ab*zuzählen, ist hier noch nicht möglich. Abzählprozesse erfordern sogenannte „cardinal-to-count transitions“ (s.o. Abb 1.13).

Freeman et al. (2000) weisen in diesem Zusammenhang jedoch darauf hin, dass echte Einsicht in kardinale Bedeutungen bereits dann von Vorschulkindern erworben werden kann, wenn diese das Eindeutigkeitsprinzip (vgl. Gelman & Gallistel 1978, s.o. 1.4.2) verstanden haben und auf dieser Basis aus falschen Zählprozeduren auf falsche Kardinalwerte und umgekehrt aus korrekten Zählprozeduren auf korrekte Kardinalwerte schließen können. Eine ‚falsche’ Zählprozedur bedeutet hier eine fehlerhafte 1-zu-1-Zuordnung zwischen Zahlwort und Zählobjekt. Die Autoren gehen nun davon aus, dass die Möglichkeit, *zwei unterschiedliche* Zählergebnisse (also Kardinalwerte) für *eine* Menge miteinander vergleichen zu müssen, also entscheiden zu müssen, welche Variante die richtige ist, zu einer konzeptuellen Repräsentation des Kardinalprinzips führt. Ein Beispiel für derartige Anforderungen wäre: Man legt eine Anzahl Bonbons auf den Tisch und fordert das Kind auf, diese zu zählen. Zählt das Kind richtig, zählt man selbst und stellt dem richtigen Ergebnis des Kindes ein falsches gegenüber, zählt das Kind falsch, gibt man entsprechend ein richtiges Ergebnis vor. Das Kind muss nun entscheiden, welches Ergebnis richtig ist. Dieses Vorgehen und die Beobachtung des Kindes von 1-zu-1-Zuordnungen während des Zählprozesses führen vermutlich dazu, dass eine Beziehung zwischen dem Eindeutigkeitsprinzip, dem Zählprozess und dem Kardinalwert der gezählten Menge hergstellt wird („one set, one cardinal“), so dass die Einsicht entwickelt werden kann, dass eine korrekte Zählprozedur einen korrekten Kardinalwert erzeugen *muss* (vgl. ebd., 87). Die Autoren gehen davon aus, dass bereits Fünfjährige über die Auseinandersetzung mit Fehlern eine derartige symbolische Zahlen-Theorie entwickeln können (vgl. ebd.). Dass Kinder Fehler verstehen, ist danach ein kausaler Faktor der Entwicklung von Zahlverständnis (vgl. ebd.). So entsteht kardinales Verständnis auch aus der Sammlung von Erfahrung mit falscher und richtiger Zählung einer gleichen Menge, wobei ‚richtig' oder ‚falsch' auf der Grundlage von Einsicht in das Eindeutigkeitsprinzip beruht.

Auf dieser Stufe 2 kann das Kind die unflexible Zahlreihe auch benutzen, um von 1 bis zu einem vorgegebenen Zahlwort zu zählen (z.B. „Zähle bis 6.“: „Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs.“) (vgl. Fuson & Hall 1983, 51). Dieses Zählen bis zu einer vorgegebenen Zählzahl vorwärts von 1 aus stellt die Basis für das Verständnis von Vorgänger/Nachfolger-Relationen dar: Innerhalb der bekannten Zahlwortreihe kann das Kind Vorgänger, Nachfolger und allgemeinere Vorher/Nachher-Beziehungen bestimmen, indem es von 1 bis zur gewünschten Zahl (vorwärts!) zählt. Beispielsweise 6 kann auf diese Weise als Nachfolger von 5 identifiziert werden, weil beim Aufsagen der Zahlwortreihe „sechs“ sofort nach „fünf“ genannt wird (Analoges gilt in umgekehrter Weise für Vorgängerbeziehungen). Das bedeutet, dass das Kind auf dieser Stufe 2 Vorgänger oder Nachfolger nicht bestimmen kann, indem es z.B. bei „sechs“ beginnt und von dort aus vorwärts zum Nachfolger bzw. rückwärts zum Vorgänger zählt, sondern Vorgänger und Nachfolger können nur über die Position bzw. Reihenfolge der Zahlworte beim vorwärtsgerichteten Durchlaufen der Zahlwortreihe ermittelt werden. Das bedeutet wiederum, dass diese Fertigkeit noch keine Einsicht in die kardinale Bedeutung einer Zahl als „eins weniger als der Nachfolger“ bzw. als „eins mehr als der Vorgänger“ impliziert. Auch allgemeinere Vorgänger/Nachfolger-Relationen können über die Fertigkeit ‚von 1 bis a' zählen verstanden werden (beispielsweise kann ermittelt werden, dass die Zahlen 9, 4 und 12 sämtlich nach 2 und vor 14 kommen (vgl. Fuson 1988, 51).

Auf dieser Stufe beginnt sich eine lineare mentale Vorstellung des Zahlenraumes auszubilden, der sog. **mentale Zahlenstrahl** (vgl. Resnick 1983): Auf der Ebene der kognitiven Schemata muss eine Verbindung des protoquantitativen Vergleichsschemas mit der Zahlwortreihe zu einer ersten Zahlenstrahlvorstellung erfolgen, um Vorgänger- und Nachfolgerbeziehungen wie auf dieser Stufe dargestellt verstehen und bestimmen zu können (vgl. Fuson 1992a, 99). Das protoquantitative Verständnis für Auswirkungen vermehrender oder vermindernder Handlungen bleibt hier jedoch weiterhin zunächst mit der Zahlwortfolge unverbunden. Die Ausbildung des mentalen Zahlenstrahls beginnt auf dieser Stufe und entwickelt sich im Verlauf der weiteren Stufen weiter, bis der mentale Zahlenstrahl schließlich in ersten Verbindungen mit dem Teile-Ganzes-Schema (s. Stufe 5) eine komplexe und elaborierte Form bekommt.

Gestützt auf diese erste Zahlenstrahlvorstellung wird hier die Ordnung der Zahlreihe verstanden: Zahlen werden in linearer Anordnung und durch eine spezifische Position in einer Reihe repräsentiert. Diese Vorstellungsbilder müssen nicht statisch sein; auch sind die Abstände zwischen den Zahlpositionen noch nicht gleichmäßig und unveränderlich. Entscheidendes Merkmal ist zunächst nur die Reihenfolge, also die lineare Anordnung der Zahlen bzw. der Zahlwörter, die zueinander in Vorgänger- und Nachfolgerbeziehungen stehen. Diese Repräsentation von Zahlen ist nach Resnick (1983, 110f.) in der Regel bereits bei Schuleintritt entwickelt. Sie ermöglicht eine vorkardinale Mengenbestimmung durch Zählen (wie viele?), Zahlvergleiche, die Ermittlung von Vorgänger- und Nachfolgerzahlen und ein Durchschauen dieser Beziehungen: Jede nachfolgende Zahl stellt eine größere Zahl (noch nicht: Quantität) dar als ihr Vorgänger (s. Abb. 1.16).

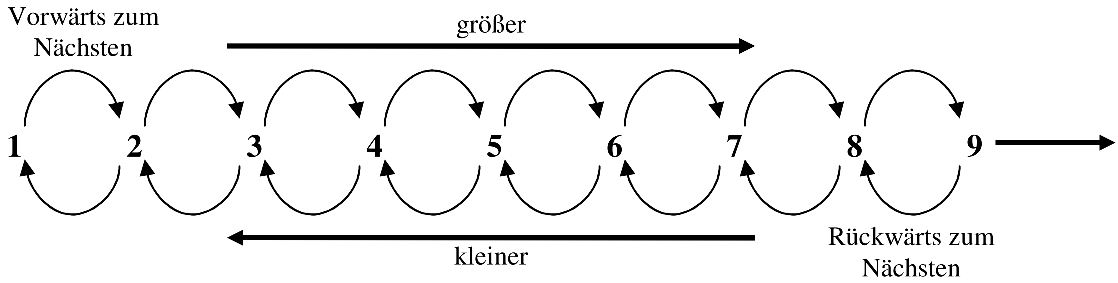


Abbildung 1.16: Mentaler Zahlenstrahl (nach Resnick 1983, 114)

Der Zahlvergleich kann bereits auf Stufe 2 bzw. auf der Basis des mentalen Zahlenstrahls zählend oder direkt (analog) vorgenommen werden. Der zählende Zugang wurde oben unter Bezug auf Fuson erläutert als Durchlaufen der Zahlwortreihe unter Beachtung der Zahlpositionen (die Zahl, die zuerst genannt wird, ist die kleinere, da sie vor der anderen Zahl in der Reihe steht). Über diese Verbindung von Vergleichsschema und Zahlwortreihe werden so Kinder bereits mit etwa 4 Jahren fähig, Mengen miteinander zählend zu vergleichen; dies bedeutet dabei noch kein kardinales Verständnis der Menge. Beim direkten Mengenvergleich werden die Zahlen in einer positionalen Repräsentation aktiviert. Damit lassen sich zwei Positionen am mentalen Zahlenstrahl vergleichen, ohne dabei zählen zu müssen:

> „They can quickly identify which of a pair of numbers is ‚more' by mentally consulting this number line, without actually stepping through the sequence to determine which number comes later." (Resnick 1989, 164).

Noch in der Vorschulzeit erwerben einige Kinder die Fähigkeit, rückwärts zu zählen (vgl. Resnick 1983, 114). Der mentale Zahlenstrahl mit einem „größer"-Richtungsmarker wird dann um eine Rückwärtsrichtung, einen „kleiner"-Richtungsmarker ergänzt (vgl. o. Abb. 1.16). Die Rückwärtssequenz wird z.T. bedeutend später als die Vorwärtssequenz erworben. Zunächst wird jedoch auch sie als zusammenhängende, unflexible Sequenz gelernt und erst allmählich flexibilisert. Da Kinder meistens zuerst nur eine festgelegte Sequenz mit bestimmten Ausgangspunkt – z.B. 10 – rückwärts aufsagen können, nicht aber flexibel von beliebigen Startzahlen aus rückwärts zählen können, muss diese erste Entwicklung der Rückwärtssequenz auch noch Stufe 2 zugeordnet werden. Im Verlauf der folgenden Stufen wird das Rückwärtszählen dann ebenso wie das Vorwärtszählen flexibler einsetzbar und mit weiteren Fertigkeiten angereichert.

So wie der vorwärtsgerichtete Marker Zahlbeziehungen als jeweils größer definiert, legt der rückwärtsgerichtete Marker Zahlbeziehungen als jeweils kleiner fest. Im Gegensatz zu den später einsichtig werdenden kardinalen Relationen im Sinne von ‚eins mehr' und ‚eins weniger' versteht das Kind hier also sequenzielle Relationen in beiden Richtungen im Sinne von ‚genau davor' und ‚genau danach' und kann diese zur Bestimmung von Vorgängern und Nachfolgern nutzen (vgl. Fuson 1988, 51, 54). Durch die Verbindung des Vergleichsschemas mit der Zahlwortreihe kann also festgestellt werden, dass die 5 kleiner ist als die 6, weil die 6 nach der 5 kommt. Diese Integration von Vergleichsschema und Zahlwortsequenz stellt damit den ersten Schritt auf dem Weg zur Integration von Mengen- und Zahlwissen dar.

Der mentale Zahlenstrahl ermöglicht zunächst nur ein unflexibles Vorwärts- und Rückwärtsbewegen, Zahlpositionsbestimmungen sowie Zahlvergleiche der Art größer / kleiner oder kommt vor / nach. Erst die Verwendung von (numerischen) Teile-Ganzes-Beziehungen kann eine qualitative Erweiterung bewirken (vgl. Resnick 1983); Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen erlaubt u.a. flexibles Hin- und Herspringen auf dem mentalen Zahlenstrahl (vgl. Abb. 1.17) sowie Einsicht in die Komplementarität von Addition und Subtraktion (s.u.).

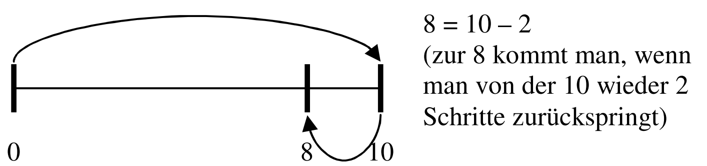


Abbildung 1.17: Integration des mentalen Zahlenstrahls mit Teile-Ganzes-Aspekten I.

Auf dieser Ebene jedoch – entgegen der häufig vertretenen Ansicht, Kinder könnten ohne vollständige Verfügbarkeit eines Invarianz- und Kardinalitätsverständnisses nicht sinnvoll rechnen – werden bereits einfache Additionsaufgaben durch Vorwärtszählen bewältigt. Rechenaufgaben werden dabei durch konkretes Zählen von Objekten oder durch Zählen mit den Fingern gelöst, die Aufgabe wird also modelliert. Der Richtungsmarker gibt dabei an, dass die Zahlen durch ein Vorwärtsschreiten auf dem Zahlenstrahl mehr werden.

Nach Fuson (1992a, 64f.) lassen sich folgende konkrete, wenig komplexe Zählprozeduren als Lösungszugänge unterscheiden: „count all“, „separate from“, „count smaller and count the rest“, „add on up to the sum“ und „separate to“. Auf Stufe 2 können nur rein zählend einfache Additionsaufgaben gelöst werden; die auf dieser Stufe verfügbare Strategie ist „count all“.

Unter Bezug auf Befunde von Riley (1981), Riley et al. (1983) und Hudson (1983) fasst Fuson Aufgabentypen zusammen, die von über 90% der Kindergartenkinder ohne besondere Vermittlung oder Übung gelöst werden (vgl. Fuson 1992a, 64ff.; s. zu Werten von Erstklässlern auch Stern 1994b):

- Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt
- Kombinationsaufgabe, Gesamtmenge unbekannt
- Vergleichsaufgabe, Differenzmenge unbekannt
- Austauschaufgabe, Austauschmenge unbekannt.

Das heißt, dass bereits Kindergartenkinder ohne spezielle Einübung durch konkrete Modellierung semantisch eingekleidete Additionsaufgaben (und etwas später Subtraktionsaufgaben) verstehen und durch Zählen lösen können. Da auf Stufe 2 allerdings weder flexibel Aus- und Abzählen miteinander verbunden werden können, also hier nur „count-to-cardinal transitions“, nicht aber auch „cardinal-to-count transitions“ vorgenommen werden können, noch Menge-Teilmengen-Beziehungen erfasst werden, können auf dieser Stufe lediglich zwei der Aufgabentypen bewältigt werden (s.u.; die übrigen genannten Aufgabentypen sind der nächsten Stufe 3 zuzuordnen und werden dort vorgestellt).

An dieser Stelle muss betont werden, dass diese Zuordnung von (Sach-)Aufgaben zu Fusons Entwicklungsleveln keine starre Entsprechung bedeutet, sondern dass deren Erläuterung verdeutlichen soll, welche den Leveln zugeordneten Fertigkeiten für welche Anforderungen notwendig sind. Dieses Vorgehen schließt dabei nicht aus, dass Kinder häufig bestimmte Anforderungen noch auf Stufe 2, andere Anforderungen dagegen bereits auf Stufe 3 bewältigen: So gibt es beispielsweise Kinder, die das Rückwärtszählen erst mit 2 Jahren Verzögerung nach dem Vorwärtszählen erlernen; diese Kinder können daher Aufgaben, die durch vorwärtsgerichtete Zählprozesse lösbar sind, vielleicht bereits auf Stufe 4, andere Aufgaben, die die Verfügbarkeit über die Rückwärtssequenz erfordern, aber nur auf der Ebene von Stufe 3 bewältigen (vgl. Fuson 1988, 52). Insgesamt wird also durchaus ein wellenartiger Entwicklungsverlauf mit sich überlappenden Kompetenzstufen angenommen.

Die Stufe 2 zugeordneten Fertigkeiten ermöglichen die Lösung folgender mündlich gestellter Anforderungen (Aufgaben nach Fuson 1992a, 64):

- **Addition I.** Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt: *Joe hatte 3 Murmeln. Dann gab ihm Tom noch 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Joe nun?* (count all)
- **Addition II.** Kombinationsaufgabe, Gesamtmenge unbekannt: *Joe hat 3 Murmeln. Tom hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben sie zusammen?* (count all)

Bei beiden Additionsbeispielen werden alle beteiligten Mengen gezählt: Dies wird daher als „Counting all“-Strategie bezeichnet. Kinder können diese Anforderungen nicht nur auf konkreter Ebene durch Auszählen lösen, wenn ihnen die Mengen tatsächlich vorgelegt werden. Sie bewältigen dies auch bei mündlich gestellten Aufgaben ohne Material (vgl. Fritz & Ricken, i. Vorb.). Auch hier könnte man annehmen, dass bereits cardinal-to-count transitions vorgenommen werden müssen, wenn z.B. die Vorgabe „3 Murmeln“ in Zählhandlungen umgesetzt wird. Allerdings gehen Kinder mit solchen vermeintlich kardinalen Anforderungen zunächst um, ohne über Kardinalität nachzudenken. Sie suchen und sehen nicht die Menge bzw. sie zerlegen nicht, sondern zählen Positionen.

Da auf dieser Stufe zum einen höchstens mechanisch rückwärtsgezählt und zum anderen noch nicht *weiter*gezählt werden kann, sind Subtraktionsaufgaben hier nicht möglich: Häufig ist zwar zu beobachten, dass Kinder schlichte Subtraktionsaufgaben bereits sehr früh bewältigen, indem sie vorwärtszählen. Beispielhaft soll folgende Austauschaufgabe erläutert werden, die ebenfalls von über 90% der Kindergartenkinder gelöst wird, die aber wesentlich höhere Anforderungen stellt und damit den Stufe 3 zugeordneten Fertigkeiten entspricht (s. auch dort; Aufgabe nach Fuson 1992a, 64):

- **Subtraktion I.** Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt: *Connie hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Jim 3 Murmeln ab. Wie viele Murmeln hat sie jetzt noch?* (separate from)

Diesem Subtraktionsbeispiel liegt die Aufgabenstruktur $8 - 3 = ?$ zugrunde. Wird diese Aufgabe nach der zugeordneten „separate from“-Strategie (vgl. Fuson 1988, 261) nicht durch Rückwärts-, sondern durch Vorwärtszählen gelöst, sind sowohl „count-to-cardinal transitions“ als auch auf Stufe 2 noch nicht beherrschte „cardinal-to-count transitions“ zu vollziehen: Von der Ausgangsmenge (8 Murmeln) müssen 3 Elemente weggenommen („separate from“; bzw. in Fuson 1988 „take away *a*“) und die verbliebenen Elemente (vorwärts) ausgezählt werden. Dabei erfordert dieses Wegnehmen von 3 Elementen aus der Menge ‚8' eine „cardinal-to-count transition", da aus der Ausgangsmenge (8 Murmeln) die bekannte Teilmenge (3 Murmeln) heraus *ab*gezählt werden muss. Auch ein Lösungszugang durch Rückwärtszählen ist auf Stufe 2 nicht denkbar, weil dafür *um* 3 Zählschritte zurückgezählt werden müsste, die Zählschritte also bereits als eigenständige Zähleinheiten aufgefasst werden können müssten.

Die Schwierigkeit von Aufgaben hängt also weniger von der Rechenart oder der Zahlgröße ab als vielmehr von der *Aufgabenstruktur*. Die auf Stufe 2 lösbaren Aufgaben unterscheiden sich von den schwerer zugänglichen der nächsten Stufe 3 dadurch, dass ihre Summe aus den gleichen, verfügbaren Objekten besteht: Beiden Additionsaufgaben liegt demnach die Struktur Teil + Teil = Ganzes zugrunde. Auch diese simplen Aufgaben weisen also natürlich eine Teil-Teil-Ganzes-Struktur auf: Es geht *immer* um die Triade Summand-Summand-Summe (s.u.). Die Lösung kann jedoch trotzdem unabhängig davon durch schlichte Zählstrategien ohne Kardinalzahlbegriff gewonnen werden. Ebenso liegt den übrigen schwierigeren Aufgaben diese triadische Struktur zugrunde unabhängig von der gesuchten Menge (Gesamtmenge, Anfangsmenge, Austausch- oder Differenzmenge). Die Bestandteile Teile und Ganzes stehen je nach Aufgabentyp in unterschiedlicher Beziehung zueinander und eben diese Art der Beziehung ist für die Schwierigkeit einer Aufgabe entscheidend: Aufgaben wie hier dargestellt mit gesuchter End- bzw. Gesamtmenge sind wesentlich einfacher als Aufgaben mit unbekannter Anfangs-, Austausch- oder Differenzmenge, da die Lösungsprozedur („count all") unmittelbar einsichtig ist und in lineare Zählhandlungen übersetzt werden kann (vgl. dazu Stufe 3). Auf Stufe 2 entwickelt sich zwar das Teile-Ganzes-Schema, es bleibt aber unverbunden mit Zahlwortreihe und den übrigen Schemata auf der protoquantitativen Ebene. Das bedeutet, dass ein Kind auf dieser Stufe grundlegendes Wissen aus Alltagssituationen über Beziehungen zwischen Teilen und einem Ganzen entwickelt (so weiß ein Kind, dass der gesamte Kuchen in jedem Fall mehr ist als Teile davon). Auch Einsicht in Klasseninklusion entwickelt sich bereits hier im Alter von 4 bis 5 Jahren – im Gegensatz zu früheren auf Piagets Versuchen basierenden Annahmen (vgl. Resnick 1989, 163).

Stufe 3: Verbindung von ZWS & Vergleichsschema mit Vermehren / Vermindern auf quantifizierender Ebene

Auf der nächsten Stufe 3 können Sequenzen der Zahlreihe von beliebigen Startpunkten aus rezitiert und so die bisher festen Sequenzen durchbrochen werden: Damit kann *weiter*gezählt werden ohne auf Hilfen wie „running starts" zurückgreifen zu müssen.

Das Weiterzählen von beliebigen Startpunkten ermöglicht die Bestimmung von Vorgänger- und Nachfolger-Relationen unmittelbar durch Zurück- oder Vorzählen vom genannten Zahlwort bis zum nächsten davor bzw. danach (vgl. Fuson 1988, 52).

Neben dieser Fertigkeit – „counting up from *a*“ – werden auf Stufe 3 weitere drei sequenzielle Fertigkeiten gelernt: Zählen von einer beliebigen Zahl bis zu einer weiteren Zahl („counting up from *a* to *b*“) wird als vorwärtsgerichtete Fertigkeit bezeichnet, die übrigen zwei Fertigkeiten, Zurückzählen von einer beliebigen Zahl („counting down from *b*“) und Zurückzählen von einer beliebigen Zahl bis zu einer bestimmten (kleineren) Zahl („counting down from *b* to *a*“) werden als rückwärtsgerichtet bezeichnet (vgl. ebd.; Fuson & Hall 1983, 52f.). Die Zahlwortsequenz rückwärts zu produzieren stellt enorm hohe Anforderungen an das Kind. Verständlicher wird diese Anforderung, wenn man sich selbst die Aufgabe stellt, das Alphabet o.ä. rückwärts aufzusagen (vgl. unter Stufe 2 die Ausführungen zu „low-level sequence skills“). Einige Kinder scheinen die Rückwärtssequenz als eigenständige Anforderung separat von der Vorwärtssequenz zu lernen. Auch wird die Rückwärtssequenz im Vergleich zum Vorwärtszählen z.T. erst mit einer Verzögerung von bis zu zwei Jahren verfügbar (vgl. Fuson 1988, 52).

Die Möglichkeit, von beliebigen Zahlen weiter zu zählen erweitert zusammen mit der Fähigkeit bis zu bestimmten Zahlen zu zählen das bisherige *Aus*zählen zum *Ab*zählen: Ein vorgegebenes Zahlwort mit kardinaler Bedeutung kann in entsprechende Zählhandlungen umgesetzt werden („cardinal-to-count transition“).

Für das Modell des mentalen Zahlenstrahls bedeuten die Einsichten in die wechselseitigen Beziehungen von Zähl- und kardinalen Bedeutungen („count-to-cardinal“ und umgekehrt) eine Festigung der Verbindung von Zahlwort bzw. Zahlposition mit entsprechenden Mengen. Die Vorgänger- und Nachfolgerbeziehungen, die bisher nur als sequenzielle Relationen im Sinne von ‚(genau) vor’ und ‚(genau) nach’ verfügbar waren, werden hier nun auch in entsprechenden kardinalen Relationen verfügbar: Wenn „sieben“ das Zahlwort genau nach „sechs“ ist (sequenzielle Relation), dann ist „sieben“ auch genau um 1 größer als „sechs“ (kardinale Relation) (vgl. ebd., 54). Analoges gilt für die umgekehrte Beziehungsrichtung. Damit werden Zahlbeziehungen in einem ordinalen und in einem kardinalen Kontext verstanden: Die ordinale Zahlrelation zwischen Vorgänger und Nachfolger ist dann also eine ‚kommt genau nach/vor’-Beziehung und die kardinale Zahlrelation eine ‚ist um 1 größer/kleiner’-Beziehung. Auch auf einer allgemeineren Ebene sind ordinale und kardinale Zahlrelationen vorhanden: Erstere stellen ‚vor/nach’-Relationen und letztere ‚mehr/weniger als’-Relationen dar.

Die ordinalen und kardinalen Vorgänger/Nachfolger-Zahlrelationen implizieren Einsicht in das Konstruktionsprinzip der Zahlreihe (vgl. Abb. 1.18): Auf Stufe 3 erfolgt also eine Verbindung von Zahlenwissen mit dem Vermehren/Vermindern-Schema auf der Ebene quantifizierter Mengen – es ist also nicht mehr protoquantitativ. Dadurch wird der mentale Zahlenstrahl erweitert um das Merkmal ‚gleichmäßiger Aufbau': Die Zahlreihe baut sich aus aufeinander folgenden Zahlen auf, wobei die jeweils nächste Zahl immer um 1 größer ist als ihr Vorgänger. Diese Einsichten bedeuten jedoch ebenfalls noch keine vollständige Vorstellung vom Zahlaufbau als Menge: Die Einsicht, dass die Zahlreihe regelhaft aufgebaut ist, dass Zahlen Mengen zugeordnet werden können und dass die Zahlen beim Vorwärtszählen immer um 1 größer werden, muss noch nicht die Einsicht beinhalten, dass 4 in 5 *enthalten* ist. Dazu ist die *vollständige* Verbindung des Zählschemas mit dem Teile-Ganzes-Konzept erforderlich (s.u. ab Stufe 5): „As long as the number line alone is used, there is no way to relate quantities to one another except as larger or smaller, further along or further back in the line." (Resnick 1983, 114).

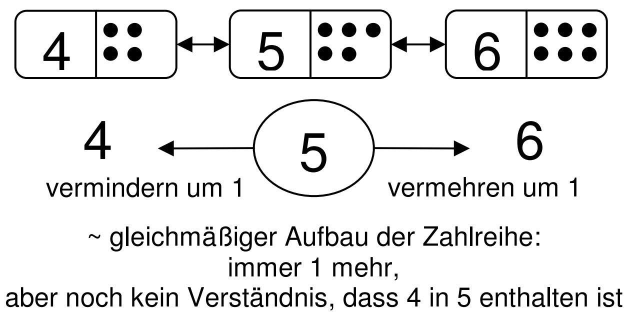


Abbildung 1.18: Konstruktionsprinzip der Zahlreihe

Diese Verbindung des Vermehren/Vermindern-Schemas mit der Zahlwortreihe ermöglicht es, die vorzahligen, intuitiven Interpretationen von Entfernen bzw. Hinzufügen exakt zu machen. Das Vermehren/Vermindern-Schema seinerseits flexibilisiert die Zahlsequenz und ermöglicht die Integration von ordinalen und kardinalen Zahlrelationen. Damit werden Kinder in die Lage versetzt, einfache Additions- und nun auch einfache Subtraktionsaufgaben zu lösen. Dass Kinder vom ersten Summanden weiterzählen, bedeutet dabei jedoch noch keine numerische Integration des Teile-Ganzes-Schemas, da diese Anforderung zunächst auf einer ‚mechanischeren' Ebene bewältigt wird (vgl. auch o. last-word-rule): Um vom ersten Summanden aus weiterzählen zu können, ist die Verbindung von kardinalem Zahlverständnis mit protoquantitativen Teile-Ganzes-Vorstellungen im Sinne von Wissen grundsätzlicher Zerlegbarkeit und Zusammensetzbarkeit mehrelementiger Mengen sowie mit einem technischen Verständnis der durchzuführenden Operation notwendig. Das bedeutet, dass ein Kind ein derartiges Weiterzählen zunächst auf der Grundlage von Nachahmung oder auswendigem Wissen ohne numerisches Teile-Ganzes-Verständnis ausführt. Auf dieser Stufe liegt also noch kein ‚echtes', sondern zunächst ein Proto-Teilmengenverständnis vor.

Stufe 3 lassen sich zusammenfassend folgende Fertigkeiten zuordnen:

- Zählen vorwärts
- Zählen rückwärts
- Weiterzählen (auch *bis* zu einer bestimmten Zahl): „count on"
- „count-to-cardinal transition" & „cardinal-to-count transition": Aus- und Abzählen
- Verständnis von Vorgänger- und Nachfolgerrelationen sowohl als sequenzielle Relationen (‚genau vor / nach') als auch als kardinale Relationen (‚genau um 1 kleiner / größer')
- Einsicht in das Konstruktionsprinzip der Zahlreihe
- Exakte Quantifizierung vermehrender und vermindernder Handlungen (einfache Addition & Subtraktion)
- Erstes Teilmengenverständnis (kardinaler Zahlbegriff + Teile-Ganzes-Verständnis auf protoquantitativer Ebene + technisches Verständnis der Operationsdurchführung)

Diese Fertigkeiten erlauben ein wesentlich fortgeschritteneres Rechnen als auf Stufe 2: Das Rechnen ist auch hier zwar noch an konkrete Modellierung mit Fingern oder Objekten gebunden. Erst im Verlauf der Entwicklung des Rechnens erfolgt eine allmähliche Ablösung dieser handlungs- und objektgebundenen Manipulationen durch Operieren in der Vorstellung oder mit Symbolen (Ziffern und Rechenzeichen). Auch die Effektivität der eingesetzten Rechenstrategien nimmt nur allmählich zu. Der Einsatz von Weiterzählstrategien bei Additionen wie 4+3 erfolgt dabei auf einem niedrigen Strategieniveau und bedeutet noch keine Integration von Teile-Ganzes-Aspekten: Kinder zählen an den Fingern oder modellieren mit konkreten Gegenständen und können so die erforderlichen Teil- und Gesamtmengen auszählen. Trotzdem stellt dieses Weiterzählen (erste count-on-Strategien; vgl. Fuson 1992a) im Gegensatz zu der count-all-Strategie, die lediglich eine Verfügbarkeit über die last-word-rule erfordert, eine Erweiterung des Denkens dar, da diese auf der Einsicht basiert, dass mit dem ersten Summanden sofort die passende Menge (Kardinalzahl) verbunden und von dort aus weitergezählt werden kann (dies bedeutet noch keine Einsicht in die Funktion des ersten Summanden als numerische *Teil*menge).

Auf der Grundlage der Stufe 3 zugeordneten Fertigkeiten wird es Kindern möglich, auch ohne besondere Unterweisung Aufgabentypen zu lösen, bei denen neben unbekannter End- bzw. Gesamtmenge auch unbekannte Anfangs-, Austausch- oder Differenzmengen bestimmt werden können. Die folgenden Aufgabentypen sind nach der oben bereits erwähnten Zusammenstellung von Fuson (1992a, 64ff.) von über 90% der Kindergartenkinder lösbar:

- **Subtraktion I.**: Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt: *Connie hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Jim 3 Murmeln ab. Wie viele Murmeln hat sie jetzt noch?* (separate from)
- **Subtraktion II.**: Vergleichsaufgabe, Differenzmenge unbekannt: *Hier sind 6 Vögel und 4 Würmer. Jeder Vogel versucht, einen Wurm zu bekommen. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?* (count smaller and count the rest) – nach Stern & Staub (2000, 92) ist die Lösungswahrscheinlichkeit hier von der Formulierung abhängig: Erfahrungsnahe Formulierungen wie hier können von der Mehrzahl der Kinder im Vorschulalter mathematisch korrekt modelliert werden; formuliert man diese Aufgabe allerdings als Situation zum quantitativen Vergleich, sind selbst Drittklässler kaum in der Lage, die Aufgabe zu lösen: „Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?“
- **Subtraktion III.**: Austauschaufgabe, Austauschmenge unbekannt: *Joe hatte 8 Murmeln. Dann gab er Tom einige Murmeln. Jetzt hat Joe noch 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat er Tom gegeben?* (separate to) – dieser Aufgabentyp wird nach Stern (1994b) allerdings nur von 49% aller Erstklässler gelöst! Diese Abweichung ist unklar, könnte aber auf sprachlich-kulturelle Unterschiede zwischen amerikanischen und deutschen Kinden zurückgeführt werden (vgl. auch Fuson 1988, 56).
- **Subtraktion IV.**: Angleichungsaufgabe, Differenzmenge unbekannt: *Susan hat 8 Murmeln. Fred hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln muss Fred noch bekommen, damit er genauso viele Murmeln hat wie Susan?* (count smaller and count the rest)
- **Subtraktion V.**: Austauschaufgabe, Austauschmenge unbekannt: *Kathy hat 9 Stifte. Wie viele Stifte muss sie noch nehmen, damit sie 15 Stifte hat?* (add on up to sum)

Die Subtraktionsaufgabe I. wurde oben bereits kurz bereits im Rahmen von Stufe 2 diskutiert: Wird die „separate from“-Strategie angewandt, bewältigt das Kind bereits Anforderungen, die Stufe 3 zugeordnet werden. Denn der Vorgang des „separate from“ erfordert sowohl „count-to-cardinal transition“ (die gesuchte Restmenge auszählen) als auch „cardinal-to-count transition“ (den bekannten Teil ‚3 Murmeln’ aus der Gesamtmenge heraus abzählen) (vgl. Fuson 1988, 261). Diese Austauschaufgabe hat die Struktur Ganzes–Teil=Teil, d.h., hier wird zuerst die Summe gebildet (8 Murmeln) und dann in den bekannten Teil (3 Murmeln) und den unbekannten Teil zerlegt bzw. wird der bekannte Teil (3 Murmeln) vom unbekannten Teil separiert („separate from“).

Die in Subtraktionsbeispiel III. dargestellte Austauschsituation wird durch „separate to“ etwas anders als durch „separate from“ bewältigt (vgl. ebd., 264): Das Kind bestimmt durch Auszählen die Ausgangsmenge (8 Murmeln) und entfernt dann davon die Elemente der bekannten Teilmenge (3 Murmeln), um so die vorgegebene Endmenge zu erreichen (hat noch 3 Murmeln). Die verbliebenen, von ‚3’ separierten Objekte werden abschließend ausgezählt. Im Unterschied zur einfacheren Strategie „separate from“ muss hier also nicht eine bekannte, sondern eine *un*bekannte Teilmenge isoliert werden.

Der Subtraktionsaufgabe II. liegt eine Vergleichssituation zugrunde: Solche Anforderungen werden gelöst, indem beide Mengen miteinander durch Zählen verglichen werden; dabei ist eine die große und die andere die kleine Menge; die kleine Menge wird ausgezählt, aus der großen Menge wird diese kleine Menge abgezählt und dann wird der Rest der großen Menge ausgezählt (vgl. Fuson 1992a, 67ff.). Die Strategie „count smaller and count the rest“ wird sowohl bei Subtraktionsaufgabe II. als auch IV. angewandt.

Die Subtraktionsaufgabe V. ist insofern ungleich schwieriger als die bereits vorgestellten Austauschaufgaben, als dass hier weitergezählt werden muss. Aber auch dies kann noch auf einer niedrigen Strategieebene gelöst werden: Das Kind legt oder zählt so lange Elemente hinzu, bis die gewünschte Zahl erreicht ist. Die hinzugekommenen Elemente werden ausgezählt.

Darüber hinaus listet Fuson (ebd., 65ff.) weitere Aufgabentypen auf, die von Schulanfängern bewältigt werden, dies jedoch aufgrund besonderer Anforderungen sehr heterogen: Dazu gehören Vergleichsaufgaben mit unbekannter Differenzmenge und Kombinationsaufgaben mit unbekannter Teilmenge. Die Lösung solcher Aufgaben erfordert ein Verständnis relationaler (Maß-)Zahlbeziehungen (s.u. Stufe 4; vgl. zum Begriff 1.2). Insgesamt werden also Aufgaben mit unbekannter End- bzw. Gesamtmenge bereits sehr früh durch einfaches Vorwärtszählen (vgl. Stufe 2) gelöst, Aufgaben mit unbekannter Anfangs-, Austausch- oder Differenzmenge sind ungleich schwieriger und erfordern Fertigkeiten, die z.T. auf Stufe 3 erlernt werden.

Stufe 4: Integration von ZWS, Vergleichsschema & Vermehren / Vermehren auf Zahlebene

Auf dieser Stufe erfolgt eine vollständige Verbindung der drei Bedeutungen ‚Sequenz’, ‚Zählen’ und ‚Kardinalität’ (vgl. Fuson 1992b, 142) sowie ein Verständnis des Zahlwortes selbst als Einheit in numerischem Sinn (vgl. Fuson 1988, 54). Auf dieser Ebene sind keine konkreten Zählobjekte mehr notwendig, kardinale Situationen werden hier nur noch über ‚Kollektionen' von Zahl*worten* repräsentiert (vgl. Fuson 1992a, 99). Jedes Zahlwort wird so zu einer Einheit mit kardinaler Bedeutung, wird also als Kette bestehend aus einer entsprechenden Anzahl an Zählschritten (Zahlworten) begriffen: „Drei“ bedeutet damit „Eins-zwei-drei“, wobei diese Sequenz nicht an eine bestimmte Position gebunden ist: Ebenso kann sich „drei Schritte weiter“ auf den Abschnitt „vier – fünf – sechs“ beziehen (vgl. Abb. 1.19).

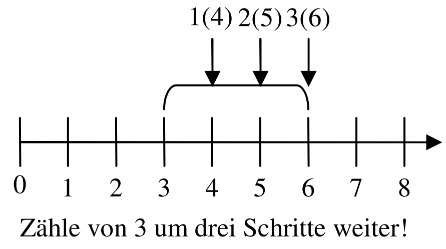


Abbildung 1.19: Zahlwort als Einheit mit kardinaler Bedeutung

Diese kardinalen Einheiten werden zu Addition und Subtraktion genutzt: Die Einsicht, dass jedes Zahlwort aus einer bestimmten Anzahl an Zählschritten besteht, ermöglicht folgendes Vorgehen bei Rechenaufgaben: Um die Aufgabe 8+5 zu lösen, wird zunächst die Zahlwortfolge bis acht durchlaufen (Sequenz & Zählen), um so die Kardinalität des ersten Summanden zu bestimmen („count-to-cardinal transition“) und anschließend werden fünf weitere Zahlworte aufgesagt; das letztgenannte Zahlwort wiederum (13) gibt die Summe von 8 und 5 an (vgl. Fuson 1988, 55; Fuson 1992b, 142). Beim ersten Schritt, dem Auszählen von acht, bezeichnet das letztgenannte Zahlwort also nicht mehr nur die Menge der gezählten Elemente, sondern gibt zugleich auch die Anzahl der genannten Zahlworte an. Beim zweiten Schritt muss der zweite Summand fünf daher auch entsprechend fünf Zahlworte umfassen; dieses Dazuzählen von weiteren fünf Zahlworten beginnt dann allerdings nicht mehr bei eins. Ist der zweite Summand größer als zwei oder drei, wird die korrekte Anzahl der ausgeführten Zählschritte durch Kontrollprozesse überwacht („keeping track“; vgl. Fuson 1988, 55; 1992a, 99; 1992b, 142): Fuson unterscheidet dabei die Unterstützung des Zählens durch auditorische Muster (z.B. bei 4+6: 4 – 567 8910) und Zählen der genannten Zahlworte (also doppeltes Zählen: 4+6: 4 – 5(1), 6(2), 7(3), 8(4), 9(5), 10(6)), evtl. unterstützt durch Finger.

Die Einsicht, dass eine Zahl sowohl eine Menge von Objekten als auch die Anzahl der benötigten Zählschritte angibt, macht die Zahlreihe selbst zählbar. Erst das Verständnis dieser Bedeutungsdimension der Zahlwortreihe als Anzahl von Zählschritten ermöglicht das Verstehen relationaler Zahlbeziehungen wie ‚mehr als' und insbesondere ‚um xy mehr als'. Erst auf dieser Basis lassen sich beispielsweise folgende Anforderungen bewältigen:

- *Joe hat 8 Murmeln. Tom hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Joe mehr als Tom?* (vgl. Fuson 1992a, 65)
- Zähle von 5 aus um 3 weiter.

„Drei“ ist in diesem Kontext keine Zahl im üblichen Sinn, sondern beschreibt wie oben erläutert einen bestimmten *Abstand* auf einem Zahlenstrahl. Dabei ist zu beachten, dass vorwärts wesentlich einfacher und schneller als rückwärts weitergezählt werden kann und dass der Umfang der weiterzuzählenden Schritte, also die Zahlgröße von Bedeutung ist (vgl. Fuson 1988, 55). Nach Fuson (ebd.) entwickelt sich die Fertigkeit, rückwärts um eine bestimmte Anzahl an Schritten zu zählen, im Verlauf des siebten Lebensjahres dann ziemlich zügig.

Auf dieser Stufe sind die Beziehungen zwischen ‚Sequenz’, ‚Zählen’ und ‚Kardinalität’ also bereits hochkomplex. Abbildung 1.20 verdeutlicht die unterschiedlichen Bedeutungsaspekte der Zahl, die auf dieser Stufe integriert werden: Das Kind verfügt neben der ordinalen Bedeutung einer Zahl als Zählzahl und als Ordnungszahl (zunächst als Position) und neben der kardinalen Bedeutung einer Zahl als Mengenmächtigkeit (Anzahl) nun auch über einen relationalen Zahlbegriff. Die Relationalzahl enthält ordinale und kardinale Aspekte in ihrer Integration, dynamisiert aber die Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen erheblich.

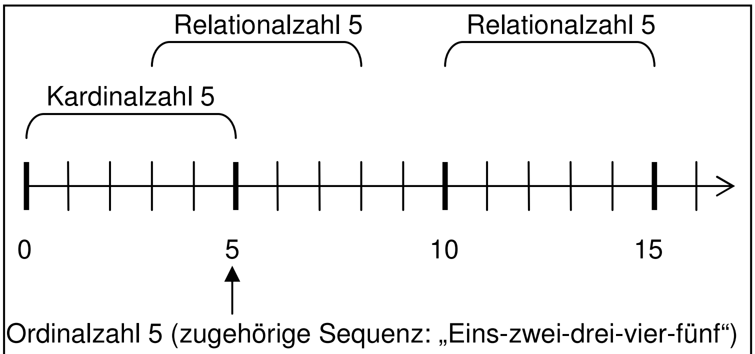


Abbildung 1.20: Bedeutungsaspekte der Zahl (in Anlehnung an Stern 2003, 119)

Die Verfügbarkeit über die kardinale Bedeutung von Zahlen darf nicht mit numerischem Teile-Ganzes-Verständnis gleichgesetzt werden: Auch wenn in Rechnungen zum Teil bereits Aufteilungshandlungen vollzogen werden, bedeuten diese kein Teile-Ganzes-Verständnis. Das Teile-Ganzes-Schema ist auf dieser Stufe immer noch protoquantitativ, das heißt, Teile-Ganzes-Aspekte können noch nicht quantifiziert werden. Ebenso wenn der Abstand zwischen zwei Zahlen ermittelt werden kann, muss das noch keine Einsicht in dessen Funktion als Teil der größeren Zahl bedeuten. Die Zusammensetzung von Zahlen aus ihren Vorgängern wird erst auf Stufe 5 verstanden.

Stufe 5: Verbindung ZWS mit dem Teile-Ganzes-Schema auf quantifizierender Ebene

Auf der 5. Stufe bestehen kaum Schwierigkeiten beim Weiterzählen. Richtungswechsel können flexibel vorgenommen werden. Diese flexible zweiseitige Durchlaufbarkeit der Zahlreihe unterstützt die Integration von Vorwärts- und Rückwärtssequenz und erlaubt auf diese Weise erste Einsichten in die Komplementarität von Addition und Subtraktion.

Die Zahlwortsequenz ist auf dieser Ebene sowohl seriell als auch kardinal eingebettet: Jedes Zahlwort wird als eigene Einheit aufgefasst; zum einen liegt dieser Einheit eine bestimmte Sequenz zugrunde und sie hat einen festen Platz innerhalb der Zahlreihe (ordinale Bedeutung), zum anderen beinhaltet sie die jeweils vorhergehenden Anzahlen. Letzteres impliziert kardinale Bedeutungen einer Zahl sowie das Konstruktionsprinzip der Zahlreihe als aufgebaut aus Zahlen, die alle jeweils einen Nachfolger haben, welcher um 1 größer ist als sie. Durchläuft man die Zahlreihe vorwärts, wird also mit jedem neuen Zahlwort die Menge um genau 1 größer, durchläuft man sie rückwärts, wird die Menge jeweils um 1 kleiner. Jedes Zahlwort ist daher sowohl ein Wort mit kardinaler als auch eins mit sequenzieller Bedeutung und umfasst alle Zahlworte vor sich einschließlich sich selbst: Diese ‚kardinale Sequenz' („cardinalized sequence") repräsentiert somit sowohl Klasseninklusion als auch Seriation (vgl. Fuson 1992a, 100).

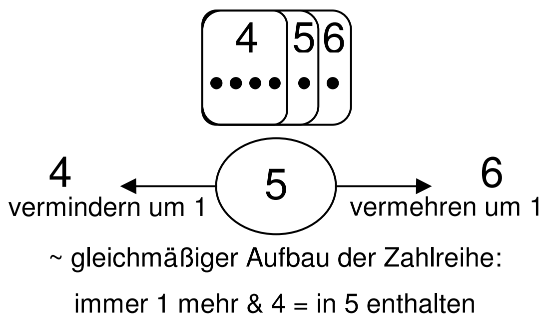


Abbildung 1.21: Integration ‚Konstruktionsprinzip der Zahlreihe' und ‚Teile-Ganzes-Konzept'

Damit ist eine wesentliche konzeptuelle Erweiterung möglich: Wenn Zahlen ihre Vorgänger beinhalten, bedeutet das, dass sie aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind (vgl. Abb. 1.21).

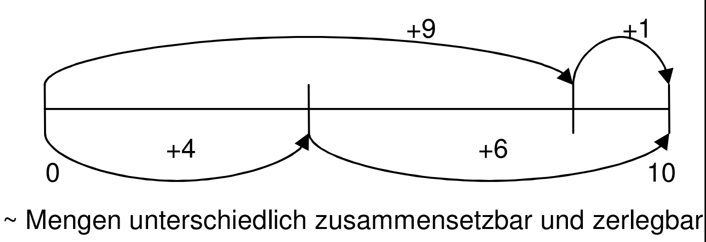


Abbildung 1.22: Integration des mentalen Zahlenstrahls mit Teile-Ganzes-Aspekten II.

Diese Interpretation von Zahlen als aus Teilen zusammengesetzten Ganzen stellt den bedeutsamsten konzeptuellen Fortschritt innerhalb der ersten Schuljahre dar (vgl. Resnick 1983, 114). Auf Stufe 5 findet also die Verbindung des protoquantitativen Teile-Ganzes-Schemas mit dem Zahlenwissen statt: Teile-Ganzes-Konzepte werden mit dem mentalen Zahlenstrahl integriert und sind damit quantifizierbar (vgl. Abb. 1.22):

> „With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children.” (ebd.).

Das vorzahlige Konzept der Zerlegbarkeit bzw. Zusammensetzbarkeit von Mengen übertragen auf Zahlen ermöglicht die Einsicht, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, sie also in regelhaften Beziehungen zueinander stehen. Damit kann jeder Rechensituation eine triadische Struktur unterlegt werden (vgl. Fuson 1992a): Die auf dieser Stufe erreichte konzeptuelle kardinale Struktur setzt immer drei Kardinalzahlen in eine spezifische Beziehung zueinander derart, dass zwei Zahlen zusammen äquivalent zu einer dritten Zahl sind (vgl. Fuson 1988, 282). Dabei sind diese zwei Zahlen nun nicht mehr fest in die dritte Zahl eingebettet, sondern können separat betrachtet und mit der dritten (Summe) verglichen werden (vgl. Abb. 1.23). Diese Verbindungen führen zu der Triade Teil-Teil-Ganzes bzw. Summand-Summand-Summe.

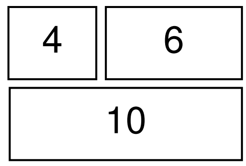


Abbildung 1.23: Triadische Struktur von Rechensituationen

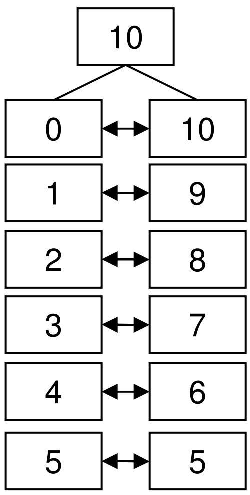


Abbildung 1.24: Zahlentripel: Die Zahl 10 in allen möglichen Zerlegungskombinationen

Das Teile-Ganzes-Schema beschreibt die Beziehungen zwischen solchen Zahlentripeln (vgl. Resnick 1983, 115). Beispielsweise stellt im Triple 4-6-10 die 10 immer das Ganze dar, 4 und 6 sind in diesem Beziehungsgefüge immer die Teile. Zusammengesetzt sind 4 und 6 äquivalent zu 10. Diese drei Komponenten Teil-Teil-Ganzes bilden eine Einheit, deren Bestandteile zueinander in unterschiedlichen Beziehungen stehen: Das Ganze kann in seine Teile zerlegt und es kann aus unterschiedlichen Teilen zusammengesetzt werden (auf dieser Stufe ist es nach Fuson (1992a, 1992b) möglich, jede Zahl in all ihren möglichen Kombinationen zu sehen: z.B. 10: 0-10; 1-9; 2-8; 3-7; 4-6; 5-5) (vgl. Abb. 1.24).

Diese Einsichten können sowohl auf additive als auf subtraktive Situationen angewandt werden: Unabhängig davon, ob eine Gesamtmenge oder ob Teil- bzw. Austausch- oder Differenzmengen gesucht sind, liegt den Operationen immer eine solche triadische Struktur zugrunde. Das bedeutet wiederum, dass eine Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen die Rechenkompetenzen qualitativ verändert. Denn auf dieser Grundlage müssen Aufgaben nicht ausschließlich in der vorgegebenen Form bearbeitet werden, sondern können nach einer Analyse der spezifischen triadischen Struktur in eine günstigere Struktur umgewandelt werden (z. B. 7+5=7+(3+2)=(7+3)+2=10+2). Auf der Grundlage der Einsicht, dass Zahlen zerlegbar bzw. aus Teilen zusammensetzbar sind, lässt sich jede Rechenaufgabe als Zerlegungsaufgabe interpretieren. Die Verfügbarkeit über die Zerlegungen einer Zahl ermöglicht schnelles und sicheres Rechnen durch die Ausnutzung passender Zerlegungen und Zusammensetzungen. Ist in operativer Weise beispielsweise die Struktur der 5 bekannt als 0+5, 1+4 und 2+3 lässt sich dieses Wissen nutzen für Aufgaben wie 7+5 (=7+(3+2)) oder 13−5 (13−3=10, dann 10−2=8). Diese triadische Struktur führt zu folgender Grundstruktur des Teile-Ganzes-Konzeptes (vgl. Abb. 1.25).

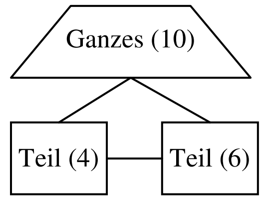


Abbildung 1.25: Triadische Grundstruktur des Teile-Ganzes-Konzeptes

Auch komplexeren Aufgaben liegt diese Struktur zugrunde. Die Teile und deren Beziehungen zueinander können jedoch vielfältiger werden; es geht also nicht mehr ausschließlich um Zahlen*tripel* (vgl. Abb. 1.26). Aufgaben wie:

Zusammen sind Elisabeth, Lara, Max und Vicent 30 Jahre alt; Lara ist 3 Jahre älter als Elisabeth, Max ist 1 Jahr jünger als Vincent, Vincent und Elisabeth sind gleich alt.

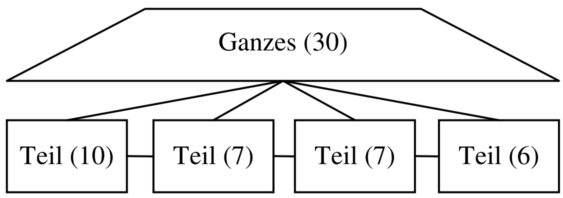


Abbildung 1.26: Komplexe Teile-Ganzes-Strukturen

lassen sich beispielsweise über ein flexibles Teile-Ganzes-Verständnis lösen, bei dem mehr als zwei Teile in bestimmten Beziehungen zueinander stehen.

Durch die Nutzung dieses Teile-Ganzes-Konzeptes für Addition und Subtraktion erhalten diese Rechenoperationen also eine erweiterte Bedeutung, die über Zusammenfassen und Hinzufügen bzw. Wegnehmen hinausgeht (vgl. Gerster & Schultz 2000, 79ff.): Addition als Zusammensetzung eines Ganzen aus Teilen; Subtraktion, gedeutet als Unterschied bzw. als Ergänzung. Durch das Teile-Ganzes-Konzept wird der Zusammenhang zwischen beiden Grundrechenarten besonders betont, da hier Rechensi-

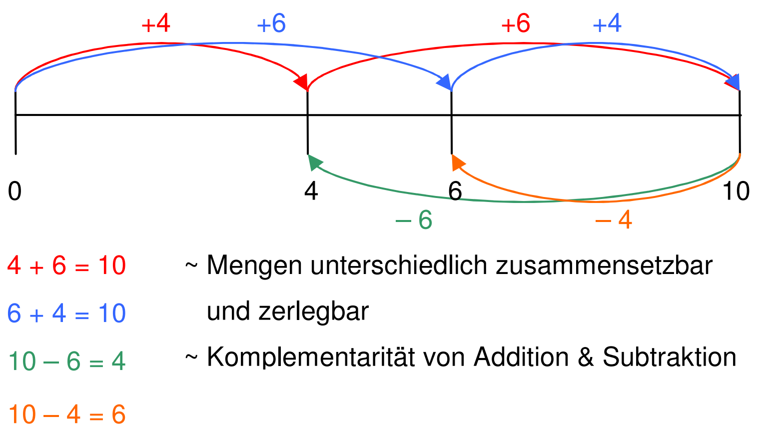


Abbildung 1.27: Teile-Ganzes-Konzept: Zusammenhänge zwischen Addition und Subtraktion

tuationen sowohl additiv als auch subtraktiv gedeutet werden können (z.B. gilt für das Tripel 4-6-10: 4+6=10 oder 6+4=10 und 10−6=4 oder 10−4=6; vgl. Abb. 1.27).

> „The protoquantitative part-whole schema is the foundation for later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of number that underlies the place value system." (Resnick et al. 1991, 32).

Auch Gerster & Schultz (2000, 339) sehen in dieser

> „Fähigkeit eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung mentaler Vorstellungsbilder für Zahlen, das eigene Erfinden und Verstehen effektiver Rechenstrategien, die Automatisierung der Basisfakten, das Verstehen der Stellenwertschreibweise und der meisten Strategien des Kopfrechnens, das Verstehen der schriftlichen Rechenverfahren und das Lösen von Sachproblemen".

Teile-Ganzes- Beziehungen sind auch und gerade für das Verständnis von Textaufgaben zentral. Verfügt das Kind über solche entwickelten und flexiblen Vorstellungen, kann es die in der Textaufgabe enthaltenen Mengen-, Zahl- und Handlungsinformationen in einen Zusammenhang bringen. Problematisch für weiteres Lernen sind daher fehlende Gelegenheiten, Teile-Ganzes-Konzepte zu entwickeln bzw. auf Zahlen anzuwenden: Viele rein zählende Rechner weisen eine Entwicklung direkt von der Zahlwortreihe zum Rechnen auf (vgl. ebd., 329). Dies wirkt sich spätestens in höheren Zahlenräumen ungünstig auf die Rechenfertigkeiten aus, da das Kind mit rein zählenden Rechenstrategien in höheren Zahlenräumen und bei bestimmten Aufgabentypen nicht mehr zur Lösung kommt und die Fehlerhäufigkeit ansteigt. Beispielsweise lassen sich selbst in höheren Zahlenräumen Aufgaben des Typs a+b=__ meist problemlos durch Zählstrategien („count all"; s.o.) lösen und auch der Typ a+__=c lässt sich durch reines Weiterzählen lösen; selbst die schwierigere Form __=b+c wäre zählend lösbar mit der Strategie ‚von hinten rechnen'. Aufgaben des Typs __−b=c allerdings sind rein zählend kaum zu bewältigen, da sie statt simpler Ausführung vielmehr eine eigene Konstruktion des Lösungsweges erfordern (vgl. Probst & Waniek 2003, 73f.). Die Fähigkeit zu kardinaler Mengenzerlegung ist im Gegensatz zu reinen Zählstrategien weiterführend: Kinder mit entsprechendem kardinalem Verständnis lösen alle vier Aufgabentypen gleichermaßen häufig und richtig (vgl. ebd., 74; vgl. auch Gerster & Schultz 2000, 79). Die oben diskutierten unterschiedlichen Aufgabentypen mit spezifischen Anforderungsstrukturen werden damit sämtlich lösbar. Wird die triadische Struktur in Aufgaben erkannt, wird es unwichtig, ob nach einer Gesamt-, Ausgangs-, Austausch- oder Differenzmenge gesucht wird, da alle Varianten nun die gleiche Schwierigkeit aufweisen.

Das Teile-Ganzes-Schema in Verbindung mit Zählfertigkeiten und dem mentalen Zahlenstrahl spezifiziert also die Beziehungen zwischen Zahlentripeln (vgl. Resnick 1983, 115): Im Tripel 4-6-10 sind 4 und 6 Teile und 10 das Ganze; diese Beziehung bleibt unabhängig von der Art der Rechenoperation bestehen. Solche Beziehungen von Teilen zum Ganzen sowie Veränderungen von Teilen und Ganzem lassen sich in vier spezifische Anforderungsstrukturen differenzieren, die sich z.T. aber auch überschneiden können: Die Grundlage, das Ganze in Teile zerlegen bzw. aus Teilen ein Ganzes zusammensetzen zu können entwickelt sich wie gezeigt auf Stufe 5: Dazu gehören das systematische Finden aller möglichen Zerlegungen zu einer Zahl und als ‚besondere' Form der Aufteilung eines Ganzen in zwei Teile Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben (~ zwei gleich große Teile bilden ein Ganzes). Diese Aufgaben sind Voraussetzung für die auf Stufe 6 hinzukommende Anforderungsstruktur ‚Kompensation'. Durch die Verbindung des Teile-Ganzes-Schemas mit dem Vermehren/Vermindern-Schema auf quantifizierender Ebene treten auf dieser nächsten Stufe 6 neben kompensierenden noch kovariierende Beziehungen hinzu. Auf der letzten Stufe 7 wird diese Verbindung schließlich auf der Zahlebene echt numerisch und befähigt neben der Übertragung kompensierender und kovariierender Strukturen auf die Zahlebene zur Wahrnehmung und Nutzung komplexer Beziehungen zwischen Rechenaufgaben:

Stufe 6: Verbindung Vermehren/Vermindern mit Teile-Ganzes auf quantifizierender Ebene: Kompensation & Kovarianz

In Verbindung mit dem Vermehren/Vermindern-Schema auf quantifizierender Ebene erlaubt das Teile-Ganzes-Schema Einsicht in Äquivalenz-Beziehungen (vgl. Resnick 1992, 411): Darunter fallen kompensierende und kovariierende Effekte (vgl. Gerster & Schultz 2000, 341). Die folgenden Beispiele sind aus Gründen besserer Lesbarkeit auf Zahlebene gehalten. Die entsprechenden Einsichten wird ein Kind aber zunächst auf der Ebene quantifizierter Mengen und nicht auf der abstrakten Ebene des Operierens mit Zahlen machen. Die Erkenntnisse werden also zunächst aus Handlungen mit Mengen oder passenden Veranschaulichungen gewonnen.

Kompensation

Das Ganze G bleibt unverändert, wenn Elemente von einem Teil T_1 zum anderen Teil T_2 verschoben werden: $T_1+T_2=G$ und $(T_1-a)+(T_2+a)=G$. Die Differenz bleibt erhalten, wenn an beiden Teilen gleiche (vermehrende oder vermindernde) Veränderungen vorgenommen werden: $T_1- T_2=G$ und $(T_1+a)- (T_2+a)=G$. Hierbei muss zum einen das Ganze in seinen Teilen betrachtet werden und zum anderen müssen Konsequenzen im Sinne eines Vermehrens oder Verminderns berücksichtigt werden – Vermehren oder Vermindern hier im Rahmen sich gegenseitig ausgleichender Veränderungen: Z.B. gegensinniges Verändern bei Addition ($6+8=14$ und $5+9=14$) und als Spezialfall Tauschaufgaben (bei Additionen ist die Reihenfolge der Teile unerheblich für den Erhalt des Ganzen: $5+4=9$ und auch $4+5=9$, Kommutativität) und gleichsinniges Verändern bei Subtraktion ($8-5=3$ und auch $7-4=3$ ebenso wie $8-5=3$ und auch $9-6=3$).

Kovarianz

Veränderungen an einem Teil des Ganzen verursachen entsprechende Veränderungen des Ganzen: $T_1+T_2=G$ und $(T_1+a)+T_2=G+a$. Vermehren und Vermindern bewirken *hier* eine entsprechende Veränderung des Ganzen, da nur *ein* Teil verändert wird und sich diese Veränderung auf das Ganze auswirkt ($5+\underline{\mathbf{3}}=\underline{\mathbf{8}}$; $5+\underline{\mathbf{4}}=\underline{\mathbf{9}}$). Dies führt zu Nachbarbeziehungen (1 oder 2 mehr oder weniger, Nachbaraufgaben, Vorgänger und Nachfolger).

Stufe 7: Verbindung Vermehren/Vermindern mit dem Teile-Ganzes-Schema auf Zahlebene

Auf dieser letzten Stufe des Entwicklungsmodells können durch die Übertragung der bisherigen Teile-Ganzes-Strukturen auf die Zahlebene kompensierende und kovariierende Operationen bei Rechenaufgaben erkannt und durchgeführt werden. Der Wechsel auf die Ebene abstrakter Zahlen ohne quantifizierte, konkrete Mengen führt zu geläufigerer Handhabung dieser Beziehungen. So werden auch zunehmend Beziehungen zwischen mehreren Aufgaben deutlich sichtbar und nutzbar.

Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben

Hier sind alle oben aufgeführten Aspekte integriert. Zusätzlich müssen hier Beziehungen zwischen mehreren voneinander abhängigen Aufgaben berücksichtigt werden; d.h., die Gesamtmengen und deren Teilmengen sind nicht willkürlich, sondern stehen zueinander in Beziehung und bedingen sich gegenseitig. Das bedeutet, dass nacheinander mehrere Operationen durchgeführt werden müssen, wobei einige Zahlen mehrfach in den einzelnen Operationen zu berücksichtigen sind. Dies erfordert Einsicht in Beziehungen zwischen Zahlen und zwischen Aufgaben und in die Struktur der Zahlen selbst (z.B. alle Zusammensetzungen der 8 kennen). Hier müssen operative Beziehungen bekannt sein.

Umkehraufgaben stellen eine frühe, vorbereitende Ebene solcher Beziehungen dar (Komplementarität von Addition und Subtraktion: Die Zahlbeziehungen und das Gesamtverhältnis können unterschiedlich betrachtet werden bzw. bleiben in ihrer triadischen Gesamtstruktur erhalten: 5+3=8 und 8–3=5). Z.T. erfordert das Lösen solcher Aufgaben systematisches Ausprobieren (Rechendreieck, Zauberdreieck'; vgl. Abb. 1.28).

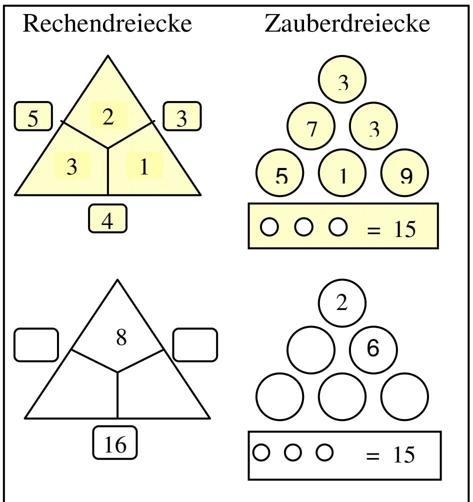


Abbildung 1.28: Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben – Beispiele

Bereits in alltäglichen Situationen kann ohne Weiteres beobachtet werden, dass kleine Kinder u.a. Vorstellungen vom Teilen, Aufteilen (im Sinne von Enthaltensein) und Verteilen haben (im Sinne von Verteilen einer vorgegeben Menge an eine bestimmte Anzahl an Personen o.ä.; diese Situationen sind im Vergleich zu Aufteilsituationen in der Regel einfacher und früher einsichtig): Elementare, vertraute Handlungen wie bekommen, abgeben, wegnehmen etc. beruhen auf diesen Vorstellungen bzw. auf den protoquantitativen Teile-Ganzes-Schemata. Allerdings ist eine Verbindung solcher intuitiven, in Alltagskontexten eingebetteten Vorstellungen mit Zahlen nicht von allen Kindern ohne Weiteres zu erbringen: Gerster & Schultz (2000, 339) weisen darauf hin, dass eine sinnvolle Verbindung von diesem (pränumerischen) Grundverständnis des Teile-Ganzes-Konzeptes mit einer (numerischen) Anzahlvorstellung nicht automatisch stattfindet, sondern dass der Unterricht vielmehr gezielt diese Integration einleiten und unterstützen müsse. Eine unzureichende Anwendung des Teile-Ganzes-Schemas auf (An-)Zahlen erschwert u.a. Entwicklung und Verständnis von mentalen Vorstellungsbildern von Zahlen und die Anwendung nicht-zählender Rechenstrategien.

Da gerade rechenschwache Kinder die Stufe des zählenden Rechnens häufig nicht überwinden, muss insbesondere bei diesen Kindern eine gründliche Vermittlung von Teile-Ganzes-Beziehungen bereits auf pränumerischer Ebene einsetzen und auf numerische Situationen transferiert werden. Bei unzureichendem Teile-Ganzes-Verständnis stellen beispielsweise operative Aufgabenpäckchen, wie in Abbildung 1.29 dargestellt, für betroffene Kinder jeweils eigenständige Aufgaben dar, die einzeln mechanisch auszählend (evtl. unter Rückgriff auf entsprechend entwickelte mentale Zahlenstrahlvorstellungen) wieder neu gelöst werden müssen. Auch Aufgaben wie 8+7=8+(2+5)=(8+2)+5 lassen sich bei fehlendem Teile-Ganzes-Verständnis nur einzeln zählend lösen; geschicktes Rechnen durch sinnvolles Zerlegen ist nicht möglich.

1 + 9 =
2 + 8 =
3 + 7 =
4 + 6 =
…

Abb. 1.29: Operative Päckchen

Stufe 5 bis 7 beschreiben insgesamt ein entfaltetes Verständnis für diskrete Anzahlen und für Anzahlbeziehungen: Bereits Piaget sah im Verstehen von Zahlbeziehungen die Grundlage für echte Einsicht in das Konstruktionsprinzip von Zahlen und der Zahlreihe (vgl. Piaget & Szeminska 1975). Danach beruht ein vollständiges Zahlbegriffsverständnis auf der Integration zweier Wissens- bzw. Operationssysteme: Zum einen sind Kompetenzen der Klassenbildung und Verständnis der Klasseninklusion und zum anderen Einsicht in Ungleichheitsbeziehungen zwischen Mengen erforderlich. Ersteres bedeutet, dass – auf der Grundlage eines Verständnisses von diskreten Anzahlen – Objekte gezählt und zu Klassen zusammengefasst werden können (Klassifikation) und dass verstanden wird, dass Klassen aus Teilklassen zusammengesetzt sein können; ein Verständnis der Klasseninklusion bedeutet damit die Fähigkeit zur Einordnung von Teilklassen (Teilmengen) in eine Gesamtklasse (Gesamtmenge) bzw. entsprechend ein Zerlegen einer Gesamtklasse in Teilklassen. Das entspricht den oben erläuterten Teile-Ganzes-Beziehungen. Der zweite Aspekt – Einsicht in Ungleichheitsbeziehungen – bedeutet das Anwenden von Ordnungsrelationen auf Mengen (Seriation): Dabei werden Objekte asymmetrisch (auf- oder absteigend nach ihrer Größe, ihrem Umfang etc.) geordnet. Diese ordinale Relation liegt der Konstruktion der Zahlreihe zugrunde.

Die Integration dieser beiden Systeme ermöglicht ein Verständnis von Zahlen als zusammengesetzt aus anderen Zahlen, wobei dies durch die regelmäßige Konstruktion der Zahlreihe festgelegt ist: Eine Klasse, die nur ein Element enthält, ist daher kleiner als die Klasse, die zwei Elemente enthält. Die Einerklasse ist damit enthalten in der Zweierklasse. Erst diese Integration beider Systeme bedeutet einen vollständigen Zahlbegriff.

1.4.4 Zusammenfassung und Diskussion

In der vorschulischen und schulischen Entwicklung existieren zentrale ‚Nadelöhre', die als wesentliche Voraussetzungen für erfolgreiches Mathematiklernen gelten. Vorbereitet ist der Erwerb mathematischer Kompetenzen durch angeborenes bereichsspezifisches Wissen, welches es erlaubt, die Umgebung hinsichtlich quantitativer Kriterien zu analysieren. Dies geschieht auf der Basis zweier mathematikspezifischer kognitiver Schemata:

1. Ein digital-sequezielles Schema bereitet auf Reihenbildung und Zählen vor.
2. Ein räumlich-analoges Schema stellt die Grundlage für Mengenerfahrungen dar.

Man kann also zahlenbezogenes und mengenbezogenes Vorwissen unterscheiden. Das mengenbezogene Wissen entwickelt sich vorsprachlich und sprachlich in drei spezifischen kognitiven protoquantitativen Schemata weiter. Das zahlbezogene, sequenzielle

Vorwissen entwickelt sich sprachlich weiter mit dem Erwerb der Zahlwortreihe. Der durch angeborenes Wissen vorbereitete Erwerb der Zahlwortfolge wird durch Lernprozesse erweitert. Dass also zum einen die Zählfähigkeit universell *angelegt* ist und dass zum anderen sprachlich-kulturelle Besonderheiten der Zahlwörter während des Erwerbsprozesses durch *Lernen* angeeignet werden, ist allgemeiner Forschungskonsens.

Organisiert wird mathematisches Wissen durch angeborene oder zumindest bis zum Ende des ersten Lebensjahres erworbene, bereichsspezifische Kernprinzipien: In Bezug auf die numerische Domäne wären das ein grundsätzliches Verständnis von 1-zu-1-Zuordnung und Reihenbildung (vgl. Carey & Spelke 1994, 170; vgl. 1.3). Auf dieser Basis entwickeln sich sehr früh sowohl erste quantitative als auch erste sequenzielle Konzepte. Damit existieren zwei unterschiedliche Entwicklungsstränge, die sich unabhängig voneinander aufbauen und für ein echtes Zahlverständnis (gezielt) miteinander verbunden werden müssen. Begriffliches und prozedurales Wissen entwickeln sich dabei nicht als kontinuierliche Erweiterung universeller kognitiver Konzepte und Kernprinzipien, sondern als Um- und Reorganisation bereichsspezifischen Begriffswissens, als Überwindung alter und als Konstruktion neuer Prinzipien und Kategorien (vgl. ebd.). Daher stellt die Elaboration der Zahlwortreihe eine hochkomplexe Entwicklung dar. Dabei muss vor allem präverbales Mengenwissen mit verbalen Mengenbeurteilungen und Zählfertigkeiten prinzipienbasiert integriert werden. Der langwierige und komplexe Prozess dieser kulturell gestützten Elaboration der Zahlwortreihe auf der Grundlage angeborener kognitiver Schemata wurde oben ausführlich dargestellt und in einem Entwicklungsmodell systematisiert.

Grundlegende Zählfertigkeiten werden bereits vorschulisch ohne systematische Unterweisung erworben. Ebenfalls bereits vorschulisch entsteht ein Grundverständnis von Addition und Subtraktion auf den Grundlagen des Zählens und vorzahliger Mengenkonzepte. Erfahrungsnahe Rechensituationen können so frühzeitig durch Zählverfahren gelöst werden noch bevor ein vollständiger Kardinalbegriff verfügbar ist. Damit kann Zählen durchaus als tragfähiger erster Zugang zum Rechnen gelten. Eine korrekte Anwendung des Zählens auf Mengen mit dem Ziel, deren Kardinalwert zu ermitteln, entwickelt sich dagegen erst allmählich. Dabei entsteht Kardinalität jedoch nicht erst durch Erfahrungen mit Zählsituationen und ist daher nicht nur Resultat von Zählprozessen.

Unter Bezug auf Gelman (1991) fassen Carey & Spelke (1994, 181ff.) Entwicklung und Veränderung numerischer Begriffe in der Kindheit zusammen: Entwicklung und Veränderung numerischer Konzepte beruhen zum einen auf der Verbindung von Zahlen mit physikalischen Objekten. Unter Rückgriff auf angeborene numerisch basierte Wissenssysteme werden physikalische Phänomene untersucht und umgekehrt. Es müssen also verbindende Pfade zwischen dem einen Wissenssystem (Zahlen) und dem anderen (Körper, konkrete Objekte) konstruiert werden. Dies erfolgt durch Auseinandersetzung mit Größen und Maßen (groß/klein, größer/kleiner, mehr/weniger etc.; vgl. oben die Verbindung der protoquantitativen Schemata mit Zahlenwissen). Zum anderen beruhen Entwicklung und Veränderung numerischer Konzepte auf der Verbindung von Zahlen mit geometrischen Aspekten (vgl. oben die Konstruktion des mentalen Zahlenstrahls): Das Instrument ‚Zahlenstrahl' bildet eine solche Verknüpfung ab: Die Zahlen sind geordnet und stehen in festgelegten Abständen zueinander.

Ob Kinder und Erwachsene spontan Messinstrumente oder Zahlenstrahlvorstellungen entwickeln oder ob das „natürliche" numerische Wissen systematisch durch „kulturelles" mathematisches Wissen ergänzt werden muss (vgl. Stern 1998, 99), ist zumindest unklar (vgl. Carey & Spelke 1994, 1985). Besonders Kinder mit Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte sind jedoch auf entsprechende Unterstützung angewiesen. Wichtiges Ziel – auch für den Erstrechenunterricht – muss daher sein, Zähl- und Mengenwissen in vielfältigen Kontexten miteinander zu verbinden. Ebenso wichtig für die Entwicklung sind ausreichende Möglichkeiten, in Anwendungsprozessen verschiedene Zugänge ausprobieren zu können (z.B. kann die Anforderung ‚vorgegebene Menge bestimmen' durch subitizing, Schätzen oder Zählen bewältigt werden), um sich dann auf den jeweils effektivsten Zugang konzentrieren zu können (vgl. Sophian 1997, 347). Die ‚genetische Erstausstattung' muss also genutzt, angewandt und fruchtbar erprobt werden, damit „kulturelle" mathematische Inhalte wie kardinales Zählen, Zahlbegriffe, Rechenoperationen überhaupt erworben werden können. Zu berücksichtigen sind dabei neben biologischen und individuellen Einflussfaktoren auch sozio-kulturelle Rahmenbedingungen, instruktionale Einflussnahme sowie ausreichende Möglichkeiten, erworbene Fertigkeiten erproben und dafür Bewertungsmaßstäbe entwickeln zu können.

1.5 Lernpozesse und Wissenskonstruktion

Bisher stand die Beschreibung mathematikspezifischer Entwicklungskomponenten im Vordergrund. Neben Entwicklungsaspekten des Mathematiklernens sind auch Lernprozesse allgemein in den Blick zu nehmen. Für das Verständnis des Erwerbs mathematikspezifischer Kompetenzen – und auch der damit möglicherweise verbundenen Schwierigkeiten – muss auch geklärt werden, wie neue Information aufgenommen, verarbeitet, gespeichert und abgerufen wird und auf welche Weise neues Wissen in bestehende Wissensstrukturen integriert wird, so dass ein neuer Sachverhalt verstanden werden kann. Damit sinnvoll und begründet inhaltliche, didaktische und methodische Folgerungen für die Vermittlung von Mathematik gezogen werden können, sollen Art und Struktur von Denk- und Lernprozessen erläutert werden.

Individuelle Leistungsentwicklung ebenso wie interindividuelle Leistungsunterschiede beruhen auf komplexen Prozessen, die durch unterschiedliche, jedoch nicht voneinander unabhängige kognitive Bereiche bedingt werden (vgl. Hasselhorn 1992, 35f.):

1. **Wissensbasi**s: Inhalte, Repräsentationsstrukturen und Aktiviertheit des Langzeitgedächtnisses; also auch bereichsspezifisches Vorwissen
2. **Funktional verfügbare Verarbeitungskapazität**: Speichergröße, Geschwindigkeit der Informationsidentifizierung und -verarbeitung
3. **Strategien**: Strategische Lernaktivitäten als zielgerichtete, potenziell bewusste und kontrollierbare Prozesse
4. **Metakognitionen**: Wissen und Kontrolle über das eigene kognitive System

Quantität und Qualität dieser Bereiche sowie deren Beziehungen untereinander bestimmen den individuellen Lernerfolg. Für die im Rahmen dieser Arbeit interessierenden Aspekte der Komponenten und Durchführung eines mathematikspezifischen Förderansatzes erscheinen vor allem die Punkte ‚Wissensbasis' und damit Repräsentation, Organisation und Veränderung mathematischen Wissens sowie ‚Strategien' und ‚Metakognitionen' relevant. Zunächst soll dargestellt werden, wie Wissen im Gedächtnis repräsentiert und organisiert wird. Dazu werden zentrale Annahmen von Piaget, Bruner und Aebli referiert, bevor anschließend aktuelle Modifikationen und Modelle vorgestellt werden. Dies ist für die spätere Einordnung didaktischer Aspekte von Bedeutung, weil der Aufbau des Mathematikunterrichts sich u.a. an Piagets Theorie der kognitiven Entwicklung und an Aeblis operativer Methode sowie an Bruners Medientheorie und Spiralcurriculum orientiert. Auf die Aspekte ‚Strategien' und ‚Metakognitionen' wird anschließend ausführlich eingegangen – der Punkt ‚Metakognition' findet sich in dieser Arbeit unter dem Oberbegriff ‚Selbstregulation', da dieser neben metakognitiven Komponenten auch weitere leistungsrelevante Konzepte der Motivation und des Selbstkonzeptes umfasst.

1.5.1 Lernprozesse und Wissenskonstruktion nach Piaget, Bruner und Aebli

Den Annahmen Piagets, Bruners und Aeblis zufolge ist das Lernen (mathematischer) Begriffe und Operationen ein Transformationsprozess, bei dem äußere Handlungen in innere, vorgestellte Handlungen überführt werden. Im Verlauf dieses Kapitels wird zu klären sein, ob diese Entwicklungsrichtung – und damit die gängige Vermittlungsrichtung in der Schule – vom Konkreten zum Abstrakten tatsächlich wesentlich ist oder ob der Vernetzung von – mit subjektiver Bedeutung versehenem und aktiv konstruiertem – Wissen mehr Gewicht bei der Erklärung von erfolgreicher Wissensaneignung zukommt.

Erfahrung und Wissen müssen im Gedächtnis repräsentiert werden können, um Denkprozesse überhaupt zu ermöglichen. Kognitive Aktivitäten erfordern also immer die **Verfügbarkeit von Begriffen** (vgl. Seel 2000, 158). Die Verwendung von Begriffen dient der Orientierung in und der Erschließung der Umwelt, da dadurch Dinge und Ereignisse klassifiziert und anderen kommuniziert werden können (vgl. ebd., 159). Begriffe werden in der Regel definiert als mentale Abstraktionen, „die Klassen von Sachen, Ereignissen oder Vorstellungen repräsentieren" (ebd., 158). Wesentliche Operationen der Begriffsbildung sind also Klassifizierung und Abstraktion (vgl. ebd., 179). Durch Induktion gemeinsamer relevanter Merkmale können auf diese Weise Begriffe gebildet werden. Zur Unterscheidung relevanter und nicht relevanter Merkmalsdimensionen „reicht das bloße Vor-Augen-Haben der Gegenstände nicht. Sie müssen vielmehr noch ein zweites Mal gegeben sein, nämlich als kognitive Leistung des Individuums." (Oerter 1974, 20). Das bedeutet, dass das Individuum über eine Repräsentation des Reizes verfügen muss. Diese sind nicht ausschließlich in Form von Vorstellungen verfügbar, sondern der Mensch kann seine Umwelt und seine Erfahrungen über *drei* **Repräsentationsmodi** – Handlung, Vorstellung und Symbole (Sprache) – darstellen (vgl. Bruner et al. 1971). In diesem Sinne kann Denken nur unter Zuhilfenahme von Zeichen erfolgen, die unterschiedlich „gestischer, bildhafter, sprachlicher oder symbolischer Natur" sein können (Seel 2000, 20).

Die zentrale Frage ist dabei, ob der Ebene der konkreten Handlung tatsächlich wie weitgehend angenommen Basisfunktion zukommt und ob Denken im Sinne verinnerlichter konkreter Handlung verstanden werden darf. Im Folgenden soll dargestellt werden, welche Prozesse nach Piaget, Bruner und Aebli an Entwicklung, Verinnerlichung und Veränderung begrifflicher Repräsentationen beteiligt sind.

Zusammenfassend lässt sich Piagets lern- und denkpsychologischer Ansatz als ein allgemeines Stufenmodell der an geistiger Entwicklung beteiligten Konstruktionsprozesse charakterisieren, dem zufolge Denkoperationen basierend auf konkreter Handlung aufgebaut werden, Denkprozesse in Form verinnerlichter und reversibler Handlungen ablaufen und neue Denkoperationen durch den Vorgang der Äquilibration (s.u.) entwickelt werden. Piagets Theorie versucht darzustellen, wie Erkenntnis, also wie geistige Entwicklung zustande kommt. Danach kommt der Mensch als tabula rasa zur Welt, ohne kognitive Strukturen, Wissen oder Erfahrung, ausgestattet lediglich mit der angeborenen Fähigkeit zu lernen (vgl. Lorenz 1998, 60). Piagets Annahmen beruhen auf zwei zentralen Aspekten: Die Entwicklung verläuft in Stadien oder bestimmten Phasen und wird durch (stufenunabhängige) Äquilibrationsprozesse vorangetrieben.

Unter Äqulibrationsprozessen ist ein grundsätzliches Streben nach Gleichgewicht zwischen Umwelt und Individuum zu verstehen bestehend aus Assimilations- und Akkomodationprozessen: Assimilation bedeutet die erfolgreiche Anwendung einer vorhandenen Struktur auf ein Objekt oder ein Ereignis bzw. ein Hinzufügen neuen Wissens zu altem und Akkomodation bedeutet die Anpassung einer bestehenden Struktur (Verhaltens- bzw. Konzeptänderung) sofern keine Assimilation möglich ist. Die Entwicklung zentraler konitiver Strukturen ist dabei notwendige Basis für Erwerb und Nutzen späteren bereichsspezifischen Wissens. Die durch Äquilibrationsprozesse gesteuerten Anpassungsbestrebungen erzeugen spezifische Strukturen des Denkens. Diese lassen sich in vier qualitativ unterschiedliche, aufeinander aufbauende Stadien unterscheiden (vgl. Montada 2002b, 418ff.):

0 – 2 Jahre: Sensumotorisches Stadium
2 – 5/6 Jahre: Voroperatorisches Stadium
5/6 – 10 Jahre: Konkret-operatorisches Stadium
ab ca. 10 Jahren: Stadium der formalen Operationen

Während der sogenannten sensumotorischen Phase wird die Umwelt über Wahrnehmung und Motorik erkundet, also durch sensumotorische Wechselwirkungen zwischen Individuum und Umwelt konstruiert; aus der Beobachtung gewisser Regelhaftigkeiten baut das Kind Repräsentationen der Umwelt auf und erweitert sie kontinuierlich (vgl. Dehaene 1999, 55). Erkenntnisinstrumente des Kleinkindes sind nach Piaget Schemata, also Grundmuster des Verhaltens oder der Orientierung (z.B. das Saugschema als sensumotorisches oder das Klassifikationsschema als kognitives Schema). Das Kleinkind erforscht und konstruiert seine Umwelt mithilfe solcher Schemata oder ‚Verhaltenspläne'. Zu Beginn der sensumotorischen Phase wird die Erkundung der Welt gesteuert durch sehr spezifische Handlungsschemata, die zunächst für sich allein stehen und noch nicht mit anderen Handlungsschemata koordiniert werden können. Ein wesentlicher Entwicklungsschritt besteht in der Anpassung der Handlungsschemata an veränderte Gegebenheiten (Akkomodation) und in deren Kombination zu semantischen Netzwerken (vgl. Steiner 2001, 166).

Bezogen auf das erste angeleitete Mathematiklernen im Grundschulalter wären der Übergang von der Phase des voroperationalen, anschaulichen Denkens (etwa 2. bis 5./6. Lebensjahr) zum Stadium der konkret-operationalen Strukturen (etwa 5./6. bis 10. Lebensjahr) von besonderer Bedeutung: Im Gegensatz zu der vorherigen aktiven Phase ist diese bereits eine operationale:

> „[…] eine Operation ist eine Möglichkeit, dem Bewußtsein Daten von der wirklichen Welt zu vermitteln und sie dort so umzuformen, daß sie sich einordnen und wahlweise für die Lösung von Aufgaben verwenden lassen. […] Eine Operation unterscheidet sich von einfachem Handeln oder zielgerichtetem Verhalten dadurch, daß sie internalisiert und reversibel ist." (Bruner 1970, 46f.)

Der Übergang von konkreten Handlungen zu abstrakten, intellektuellen Operationen vollzieht sich nach Piaget durch die Ablösung von konkreten Handlungen oder Objekten und die Umwandlung in Vorstellungen. Die Gruppierung internalisierter Operationen und die Vernetzung dieser Gruppen machen geistigen Entwicklungsfortschritt aus. Aus diesem Grund werden komplementäre Operationen wie z.B. Addition und Subtraktion im mathematischen Anfangsunterricht gemeinsam behandelt: Rechenoperationen werden so in Beziehungen und Zusammenhängen gebildet.

Eine gewisse Anschauungsgebundenheit des Denkens bleibt in dieser Phase noch bestehen, die Fähigkeit zu mentalem Operieren und verinnerlichte Strukturen werden jedoch ausgebildet und verfeinert. Zudem zeichnen sich Denkprozesse zunehmend durch ihre Beweglichkeit, insbesondere durch ihre Reversibilität und Komponierfähigkeit aus. Auch die Denkentwicklung des Grundschulkindes wäre also noch an konkrete Handlung bzw. an die Verfügbarkeit konkreter Erfahrungen gebunden. In dieser Phase verfügen Kinder danach noch nicht ausreichend über die Fähigkeit, systematisch alternative, nicht direkt vorliegende oder noch nicht selbst erfahrene Möglichkeiten auf der Grundlage hypothetischer Sätze zu berücksichtigen (vgl. ebd., 47f.).

Kern Piagets strukturalistischer Entwicklungstheorie ist also die Annahme einer gestuften kognitiven Entwicklung über vier Stufen der Abstraktion. Er kategorisiert weitgehend altersabhängige und -spezifische Entwicklungsstadien, die durch fortschreitende Komplexität gekennzeichnet sind und hauptsächlich ohne äußere Lenkung aus eigenem Antrieb in Auseinandersetzung mit der Umwelt stattfinden. Entwicklung vollzieht sich danach gerichtet vom konkreten Handeln zu abstraktem Denken. Die Strukturen des Denkens sind dabei zunächst bereichsübergreifend und domänenunspezifisch. Piaget hat seine Theorien didaktisch nicht nutzbar gemacht, diese Aufgabe haben andere Forscher wie z.B. Aebli übernommen. Heute besonders betonte Aspekte Piagets Theorie mit besonderer praktischer Relevanz beziehen sich auf die *Aktivität des Individuums*.

Diese konstruktivistische Sicht liegt auch Bruners Theorie zugrunde. Dessen Forschungsschwerpunkte liegen in der Untersuchung von Wahrnehmungs-, Denk-, Lern- und Begriffsbildungsprozessen unter Berücksichtigung sozio-kultureller und motivationaler Bedingungen des Individuums. Danach beruhen Lernen und Denken auf dem Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformaten, die die Entwicklung und Verwendung mentaler Repräsentationen von Erfahrungen ermöglichen (vgl. Bruner et al. 1971).

Bruners Annahmen basieren auf „zwei prinzipiellen Auffassungen über das Wesen des Wissens“ (ebd., 377f.). Die erste Annahme besteht darin, dass Wahrnehmung nur individuelle Konstruktion und Interpretation sein kann. Diese Konstruktionen sind dabei jedoch gewissen Beschränkungen („constraints“) unterworfen: Die „physikalischen Erfordernisse der Anpassungshandlungen“, also Äquilibrationsprozesse, zwingen den Menschen, „die Welt in einer bestimmten Weise zu verstehen, in einer Weise, die durch das Wesen unseres eigenen neuro-muskulären Systems eingegrenzt ist“ (ebd.). Nach Bruner verfügt der Menschen über drei Formate zur mentalen Repräsentation von Erfahrungen: Handlung, Vorstellung (z.B. Bild) und Symbole (insbesondere Sprache). Diese sind genetisch vorbereitet und geben den Rahmen für Wahrnehmung und Interpretation der Welt vor. Erfahrung oder Wissen lässt sich danach auf enaktive (durch Handlungen), auf ikonische sowie auf symbolisch-sprachliche Weise erschließen, darstellen und weiterverarbeiten. Bruners zweite Grundannahme über das Wesen des Wissens besteht darin, dass „sich Modelle als Funktion ihrer Verwendung in einer Kultur und sodann durch ihre Träger entwickeln, wenn diese ihr Wissen den Verwendungszwecken anpassen müssen“ (ebd., 378). Modelle sind danach kulturell vorbereitet oder vorgeprägt und werden individuell modifiziert.

Die Bruner'schen Repräsentationsniveaus des Denkens und der Begriffsbildung weisen keine hierarchische, zeitlich nacheinander angeordnete Gliederung auf, nach der die ersten beiden Ebenen der enaktiven und ikonischen Repräsentation lediglich Durchgangsstadien zum Erreichen der sprachlich-symbolischen wären, sondern sollen ein System parallel einsetzbarer Aktionsebenen darstellen, die lediglich im Entwicklungsverlauf eine Akzentverschiebung von enaktiver über ikonische zu symbolischer Darstellung erfahren (vgl. Bruner 1974, 33). Die Repräsentationformate des Wissens werden somit als eigenständige und voneinander unabhängige Systeme verstanden.

Geht man also davon aus, dass Begriffe und Operationen in drei unterschiedlichen Systemen als kognitive Strukturen dargestellt werden können, stellt sich die Frage nach den *Verbindungen* zwischen ihnen: Umfassendes Wissen sollte über alle drei Medien repräsentierbar, also von Handlungen in Vorstellung und Sprache und umgekehrt übersetzbar sein. Die hier enthaltene grundsätzliche Frage nach dem Motor der Entwicklung wird wie bei Piaget mit Äquilibrationsprozessen beantwortet. Auslöser von Akkomodationsprozessen könnten Versuche sein, Erfahrung in unterschiedlichen Repräsentationssystemen darzustellen:

> „Eine Sache oder eine Situation stellt sich dem Kind in der anschaulichen Vorstellung auf eine bestimmte Weise dar. Die sprachliche Formel, die den gleichen Tatbestand ausdrückt, führt zu einer anderen Betrachtungsweise oder Schlußfolgerung: Diese Diskrepanz ruft nach der Bewältigung in einer Struktur, die von einem Medium glatt in das andere übersetzt werden kann. Sie ist wahrscheinlich eine entwickeltere, adäquatere als ihre beiden diskrepanten Vorläufer." (Aebli 1971, 8).

Aus Bruners Theorie können allgemeine Strukturen für den Unterrichtsablauf in Form enaktiven (handelnd), ikonischen (bildlich, graphisch) und symbolischen (verbal, durch Zeichensysteme) Handelns abgeleitet werden. Entwicklungsfortschritt zeigt sich darin, dass diese Darstellungsebenen zunehmend gleichzeitig und flexibel einsetzbar werden und auch im Erwachsenenalter Bestandteil der Wissensdarstellung und -erschließung bleiben. Die Gliederung der Darstellungsformen im Lehrplan Mathematik entspricht der dargestellten Bruner'schen Anordnung; im Lehrplan wird darauf hingewiesen, dass auch Überschneidungen und Mischformen der Darstellungsweisen und vielfältige Beziehungen zwischen handlungsgebundener, bildlicher und symbolischer Ebene möglich sind (vgl. Richtlinien und Lehrpläne 1996, 27) bzw. dass Beziehungen zwischen den Darstellungsformaten zur Förderung von dynamischen Vorstellungen herzustellen sind (vgl. Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung 2003, 74).

Insgesamt nehmen strukturalistische Theorien wie diese oder die Piagets eine Entwicklung in Phasen an, wobei die ersten dieser Phasen „manipulativ" sind, Wissen also weitgehend auf Handlungsvollzüge beschränkt ist; darauf folgt eine Phase, in der das Kind zu internen Repräsentationen und damit zu „einer mehr nachdenklichen Aufgabenerfüllung" fähig wird, bevor schließlich die Sprache als Denkmedium zentrale Bedeutung erhält (vgl. Bruner 1974, 33). In diesem Sinne ist Sprache bei Bruner im Gegensatz zu Piaget kein bloßes „Anhängsel des Denkens, nützlich [nur; M.G.] für den geistigen Austausch", sondern die „dritte gleichberechtigte Säule des geistigen Lebens"

(Aebli 1971, 8f.). Da die Sprache jedoch nicht ab der Geburt verfügbar ist, kann dieses Medium zwangsläufig erst später hinzutreten. Erfahrung und Wissen werden daher bis zum Spracherwerb in anderen Darstellungen repräsentiert. Wie oben bei der Beschreibung früher mathematischer Kompetenzen gezeigt (vgl. 1.3, 1.4), sind formallogische Strukturen, also Kernprinzipien angeboren. Mit Beginn der Sprachentwicklung werden diese in Sprache eingekleidet und erweitert.

U.a. Aebli (1963) formte die theoretischen Bezugsrahmen von Piaget und Bruner methodisch-didaktisch zu einem pädagogischen Handlungsraum (weiter) aus. Er unterstreicht besonders die Abhängigkeit der kognitiven Entwicklung von Erziehungsbedingungen und betont somit äußere Beeinflussungsmöglichkeiten der Denkentwicklung. Aebli stimmt Piagets Modell einer sukzessiven, sachlich und logisch geordneten Konstruktion der Denkentwicklung zu, relativiert jedoch dessen altersmäßige Zuordnung.

Aebli untersucht im Rahmen der schulischen, gesteuerten Lernprozesse, wie Wissen innerlich aufgebaut und repräsentiert wird. Denkstrukturen werden danach aus verinnerlichter Handlung entwickelt, wobei sich Denken seinerseits wiederum auch wieder auf das Handeln auswirken kann (vgl. Aebli 1980; 1990). Danach sind arithmetische Operationen als abstrahierte konkrete Handlungen aufzufassen. Im Gegensatz zu konkreten Handlungen stellen internalisierte und reversible Operationen die aktiven Elemente des Denkens dar (vgl. Aebli 1963, 56). Denkentwicklung ist als fortschreitende Bildung, Strukturierung und Vernetzung von Operationen gekennzeichnet. Unterrichtspraktische Konsequenz Aeblis Theorie ist die Forderung der Verinnerlichung von Operationen durch die Komponenten ‚konkretes', ‚zeichnerisches' und ‚vorstellendes Handeln' sowie ihre Festigung durch operatives Durcharbeiten (vgl. ebd., 119ff.). Dadurch sollen Handlungen in Vorstellungen umgewandelt werden. In der Unterrichtspraxis wird diese didaktische Abfolge häufig praktiziert – dabei wird erwartet, dass das anfängliche konkrete Handeln über zeichnerische und symbolische Darstellung allmählich verinnerlicht wird. Zur Festigung und Flexibilisierung werden verinnerlichte Operationen operativ durch variiertes und sinnbezogenes Üben in Zusammenhängen durchgearbeitet, um statt begriffslosem Auswendiglernen einsichtigen Kenntniszuwachs zu erreichen.

Dazu sind – besonders im Hinblick auf Kinder mit Lernschwierigkeiten – Aeblis häufig vernachlässigte Ausführungen bezüglich der Konzeptbildung, also der konstruktiven, Sinn und Beziehungen stiftenden Tätigkeit hervorzuheben und zu beachten (vgl. Gerster & Schultz 2000, 44): Erst eine nur vom Schüler zu leistende Reflexion der vorausgegangenen konkreten Handlung kann zu Einsicht in den strukturellen Kern und zu einer tragfähigen Bedeutungszuweisung führen, ansonsten bleiben „die ausgeführten Tätigkeiten ‚bloße Handgriffe' (Aebli, zit. in Lobeck 1992, 188)" (ebd., 45). Der häufig zitierte Leitgedanke „Denken ist verinnerlichtes Handeln" kann daher nach Gerster & Schultz (ebd., 46) dann zu Missverständnissen führen, wenn keine detaillierte Klärung der Bedeutung von ‚Handlung', ‚Verinnerlichung' und ‚Operation' im Sinne Aeblis erfolgt: Operationen sind *nicht*: „[…] bloße verinnerlichte Handlungen. Verinnerlichte Handlungen sind vorgestellte Handlungen, keine Operationen." (Aebli 1980, 213f.). So sieht Aebli den wesentlichen Unterschied zwischen Handlung und Operation im Abstraktionsgrad und damit in den „Steuerungsprozessen der Operation": „Eine Operation unterscheidet sich von der Handlung vor allem […] in dem, worauf der Handelnde bei ihrer Ausführung *achtet*." (ebd.). Nicht nur die äußerlich beobachtbare motorische Aktivität stellt die konkrete Handlung dar, sondern die vom individuellen Verständnis und von individueller Bedeutungsvorstellung des Kindes abhängige *geistige Tätigkeit*. Daher darf Handlung nicht auf schlichtes Manipulieren reduziert und Denken nicht als verinnerlichtes, verkürztes Handeln aufgefasst werden. Vielmehr wird Handlung von Denkprozessen begleitet, welche die Handlungserfahrung auswerten und den strukturellen *Kern* herauslösen können. Gedankliche Reflexion in ihrer Funktion als Verbesserung von Lernkompetenzen wird unten ausführlich thematisiert (vgl. 1.5.2, 1.5.3.1).

1.5.2 Aktuelle Annahmen zu Lernprozessen und Wissenskonstruktion

Die Entwicklung von Wissensrepräsentationen ist nach Piaget und Bruner als Wandel von konkreten zu abstrakten Konzepten bzw. von Perzepten zu Konzepten charakterisiert. So geht Piaget von bereichsübergreifenden, domänenunspezifischen Denkstrukturen und von einer gestuften kognitiven Entwicklung aus, die durch fortschreitende Komplexität und Abstraktion gekennzeichnet ist.

Aktuellere Forschungen haben jedoch gezeigt, dass solche „klassischen entwicklungspsychologischen Gegenüberstellungen" unhaltbar sind (Sodian 2002, 445): In einer Übersicht legt Sodian dar, dass Säuglinge bereits im Verlauf des ersten Lebensjahres zu spezifischer und zu übergeordneter Kategorisierung fähig werden und dass bereits Drei- bis Fünjährige abstrakte Erwartungen zu bestimmten Sachverhalten aufstellen, was ihnen eine Unterscheidung zwischen unterschiedlichen Kategorien ermöglicht (Sodian referiert eine Untersuchung von Simons & Keil (1995), in der Kinder zwischen dem Innenleben unbelebter Maschinen und dem von Tieren unterscheiden konnten, ohne Vorstellungen über „biologisches Innenleben" verfügbar zu haben). Obwohl sich Kinder im Vorschulalter leicht von Wahrnehmungseindrücken fehlleiten lassen (wie beispielsweise in Piagets klassischen Umschüttversuchen), können Drei- bis Vierjährige erwiesenermaßen Schlussfolgerungen auf der Grundlage von Kategoriezugehörigkeiten ziehen. Sodian (2002) nimmt auch auf Studien von Pauen (i. Dr.) mit 11 Monate alten Säuglingen Bezug, deren Befunde gezeigt haben, dass in diesem Alter den Kategorisierungsleistungen bereits begriffliches Wissen zugrunde liegt. Auch die in 1.3 referierten Säuglinggstudien, bei denen die Kinder auf bildliche Darstellungen und auf nicht-gegenständliche Objekte habituiert wurden, belegen, dass konkrete Handlung nicht der erste und alleinige Zugang zur Umwelterschließung sein muss. Der Erwerb von Konzepten verläuft nicht schlicht von spezifisch zu allgemein-abstrakt; Kinder lernen vielmehr zunächst Konzepte mittleren Allgemeinheitsgrades, danach spezifische und erwerben schließlich übergeordnete Kategorien bzw. Kodierungssysteme: z.B. zuerst das Konzept ‚Hund', danach spezifischere Konzepte wie ‚Schäferhund' oder ‚Pudel' und schließlich das Gattungskonzept ‚Säugetier' (vgl. Lefrancois 1994, 118). Würde Wissen immer auf einer Verinnerlichung konkreter Handlung aufbauen, verliefen Lernprozesse sehr viel langwieriger und ineffektiver als sie es de facto tun. Wissen wird also sehr frühzeitig unterschiedlich erworben – lediglich *eine* mögliche Quelle für Wissenserwerb unter anderen ist konkrete Handlung.

Die Annahme Piagets, der Mensch komme vollkommen unvorbereitet zur Welt, lässt sich ebensowenig halten wie die Annahme, dass die Entwicklung domänenübergreifender kognitiver Strukturen „Voraussetzung für den Erwerb und die Nutzung bereichsspezifischen Wissens" sei (Stern 2002, 33). Wie in den Beispielen zu Säuglingsstudien in 1.3 dargestellt, scheinen Menschen „mit einem modularisierten Gehirn auf die vielfältigen Anforderungen ihrer Umgebung vorbereitet" zu sein und können „deshalb Lernangebote aus der Umgebung schnell und ohne Umwege nutzen" (Stern 2003, 117). Gestützt auf solche, durch Kernprinzipien strukturierte domänenspezifische Wissenssysteme (vgl. Carey & Spelke 1994) und individuelle Erfahrungen wird neues Wissen bereichsspezifisch erworben. Begriffliches Wissen über Objekteigenschaften wird auf dieser Basis im Verlauf des ersten Lebensjahres entwickelt (vgl. Sodian 2002, 447).

Um die Entwicklung des Wissens über zentrale Inhaltsbereiche wie u.a. biologisches, physikalisches, numerisches oder psychologisches Wissen zu erklären, wird heute also nicht mehr von bereichsübergreifenden Strukturen und Prozessen ausgegangen, sondern von grundlegenden bereichsspezifischen Domänen. So bauen auch die angenommenen qualitativen Stadien der Denkentwicklung nach Piaget nicht streng aufeinander auf, sondern bestehen bereichsabhängig nebeneinander. Damit werden strukturalistische Annahmen qualitativer Stadien des Wissensaufbaus abgelöst durch Erkenntnisse aus der Expertiseforschung. Danach lassen sich die Unterschiede im Denken und Lernen von jüngeren und älteren Kindern oder Erwachsenen nicht ausreichend mit der Piaget'schen Entwicklungstheorie erklären (vgl. Stern 2002, 27): Die Vorstellung kognitiver Entwicklung als gerichtetem Prozess ‚vom konkreten Handeln zum abstrakten Denken' greift zu kurz, da zum einen empirisch gezeigt werden konnte, dass „sich auch intelligente Erwachsene beim Lösen eher formaler Probleme von Kontextfaktoren leiten lasen, statt das Problem sofort auf seine abstrakte Struktur zu reduzieren" (ebd., 28). Zum anderen sind schwächere Leistungen jüngerer Kinder nicht auf schlechtere kognitive Voraussetzungen wie z.B. mangelnde Abstraktionsfähigkeit zurückzuführen, sondern eher auf „weniger Gelegenheiten zum Wissenserwerb": „Experten und Novizen unterscheiden sich also nicht im Abstraktionsgrad ihres Wissens, sondern in dessen Vernetzung und Strukturierung" (ebd., 29; vgl. Gruber 2001). Eine an Piagets Unterscheidung zwischen (früherem) konkretem und (späterem, elaborierterem) formalem Denken orientierte Schlussfolgerung, „dass das Denken von Grundschulkindern noch so stark an konkretes oder bildliches Anschauungsmaterial gebunden sei, dass der Umgang mit abstrakten Symbol- und Zeichensystemen noch schwer falle", ist daher zu vermeiden (Stern 2002, 27).

Befunde der Expertiseforschung sprechen also gegen eine zentrale Stellung von abstraktem Wissen und gegen die Annahme, Experten würden Probleme durch Reduktion auf deren formale Struktur lösen (vgl. Gruber 1999, 2001; Stern 2002). Von Bedeutung neben abstrakt-symbolischer Repräsentation sind besonders situationsspezifisches Wissen und anschauliche Repräsentation. Jüngeren Kindern fehlt z.T. einfach ausreichend Gelegenheit, anschauliche Repräsentationen auszubilden und vielfältiges situationsspezifisches Wissen aufzubauen – im Gegensatz zu Experten, die situationsadäquat formal-abstraktes oder situationsbezogenes Wissen abrufen und flexibel kombinieren können, sind Novizen trotz beispielsweise verfügbarer Formeln nicht in der Lage, diese in unbekannten Situationen anzuwenden (vgl. Stern 2002, 29). Dies unterstreicht die Bedeutung ausreichender *Gelegenheit* zu Wissenserwerb: Stern (ebd., 31f.) referiert Untersuchungen zu Fähigkeiten und Defiziten von Hypothesenprüfung bei Grundschulkindern, da diese Fähigkeit der Hypothesenprüfung konkretes von formalem Denken zu unterscheiden erlaubt. Die Befunde belegen, dass Kinder, die zu eigenständiger Hypothesentestung noch nicht fähig waren, trotzdem unzulängliches Verhalten bei anderen Kindern feststellen konnten. Stern (ebd., 32) schließt daraus, „dass es sich bei den Defiziten im

Hypothesenprüfen nicht um eine prinzipielle Überforderung handelt, sondern eher um einen Mangel an Erfahrung.“

Eine effektive Organisation des Wissens erfordert das Schaffen subjektiver Bedeutung, da Memorieren bedeutungsloser, unverstandener und/oder isolierter Information aufwendiger ist als bedeutungsvolles Lernen. Den Annahmen des kognitiven Konstruktivismus zufolge ist das Wissen einer Person immer das Produkt individueller Bedeutungskonstruktion. Damit behalten die konstruktivistischen Grundgedanken u.a. Piagets trotz der Relativierung anderer Aspekte Gültigkeit und entscheidendes Gewicht: Nur die aktive Auseinandersetzung eines Individuums mit Gegebenheiten seiner Umwelt führt zu individuellen Bedeutungskonstruktionen und zu Lernen. Dies erklärt die Art, wie Kinder mathematische Kompetenzen erwerben (müssen): Sensorischem Material oder Anschauung immanente mathematische Strukturen, Beziehungen und Merkmale lassen sich nicht einfach ablesen, da mathematische Begriffe „aus der Umwelt nicht sinnlich ableitbar“ sind (Schulz 1998, 86). Die simple Annahme beispielsweise, dass ein Kind unter der Voraussetzung ausreichend entwickelter Wahrnehmungsfähigkeit, genügend konkreter Erfahrung, funktionierender kognitiver Stützfunktionen und entsprechender didaktischer Hinweise „mathematische Beziehungen aus geeignet strukturiertem Material und dem Umgang damit abstrahieren *müsse*“, greift zu kurz, da mathematische Beziehungen nicht wahrnehmbar sind, sondern zunächst einer aktiven mentalen Konstruktion bedürfen (Gerster & Schultz 2000, 29). Eine Vermittlung von außen durch Material, ikonische oder symbolische Darstellung allein bewirkt keinen einsichtigen Aufbau von Wissen. Der Lernende muss sich Inhalte und Begriffe aktiv selbst konstruieren und ihnen Bedeutung beimessen. Diese Auseinandersetzung kann auf handelnder, anschaulicher oder denkender Ebene erfolgen. Allerdings stehen diese Ebenen nicht unverbunden nebeneinander, sondern *echter* Wissenserwerb und *echtes* Verständnis erfordern die Verbindung der Ebenen, also Handlung begleitende Denkprozesse: „Die mathematischen Operationen sind eben nicht schon in den Handlungen ‚enthalten’, […] sondern sie treten durch einen konstruktiven Prozeß zu den konkreten Handlungen“ (Dörfler 1986, 88). Dies kann nur vom Lernenden selbst erreicht werden. Dies bedeutet, dass nicht nur konkretes Handeln als Ausgangspunkt bzw. nicht nur eine Erarbeitung vom Konkreten über Bildliches zu Abstraktem sinnvoll ist, sondern dass vielmehr vielfältige Erfahrungen mit dem Lerngegenstand in wechselnden, miteinander zu verbindenen Kontexten und auf verschiedenen Repräsentationsniveaus sowie gründliche Erfahrungsauswertung notwendig sind (vgl. 3.3.7). Nicht die Abfolge geistiger Tätigkeit von konkret zu abstrakt, sondern Organisation und Vernetzung des Wissens sind Voraussetzung für den Aufbau einer tragfähigen Wissensbasis (vgl. Stern 2002, 32).

Unter Bezug auf Schütte (1994, 25f.) sollen an dieser Stelle auch unter didaktischen Gesichtspunkten geeignet erscheinende Prozesse der Einordnung neuen Wissens in bestehende Wissensstrukturen dargestellt werden: Integration neuer Information kann entweder durch ‚bottom-up'- oder durch ‚top-down'-Prozesse erfolgen. Grundlage ist dabei die Annahme, dass für häufig erfahrene Situationen kognitive Schemata – „Frames" – verfügbar sind, welche in ähnlichen Situationen zur Aufnahme und Verarbeitung der neuen Information aktiviert werden. Damit wird dem neuen Sachverhalt eine bestimmte Bedeutung zugeordnet und es entsteht eine gewisse Erwartungshaltung. Kann bei einer Anforderung ein adäquater „Frame" frühzeitig aktiviert werden, wird aufgabenspezifisches Wissen über Inhalt, Bedeutung und notwendige Prozeduren und deren Reihenfolge zugänglich – das Problem kann ‚top down' gelöst werden. Kann dagegen kein passender „Frame" aufgerufen werden, muss ausgehend von den konkret gegeben Informationen in der Aufgabe eine geeignete Lösungsstrategie entwickelt werden – das Problem muss ‚bottom up' bearbeitet werden. Ein Verstehensprozess läuft danach als rasch einsetzender „Prüfungsvorgang hinsichtlich des Abrufens geeigneter Schemata" (ebd.) ab. Auf dieser Grundlage werden Phänomene selektiver Wahrnehmung oder Missverständnisse im Unterricht erklärbar:

> „Ist nämlich ein Interpretationsrahmen erst einmal aufgerufen, so wird die folgende Information auf seinem Hintergrund interpretiert bzw., wenn sie nicht passt, erst einmal ignoriert. […] Ein Beispiel aus dem Mathematikunterricht für die vorzeitige und inadäquate Aktivierung von Schemata ist die rein rechnerische Verknüpfung von Zahlen in Textaufgaben, ohne auf deren Beziehungen zur Sache einzugehen." (ebd.)

Mathematischen wie auch allen anderen Lernprozessen liegen also komplexe Vorgänge auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen zugrunde, in deren Verlauf der Lernende eigenaktiv Repräsentationssysteme auf- und ausbaut. Dabei kommt einer geeigneten *Vernetzung* der Wissenselemente größere Bedeutung zu als deren *Abstraktionsgrad*. Für Einsichtsbildung ist dabei handlungsbegleitende gedankliche Reflexion notwendig.

1.5.3 Beeinflussung der Wissensnutzung und -organisation durch Selbstregulation & Strategieeinsatz

Die *effektive* Organisation und Ausführung von Denkprozessen hängt nicht nur von der Verfügbarkeit angemessener Begriffe, also von einer ausreichenden Wissensbasis ab, sondern auch von adäquatem Strategieeinsatz, von ausreichenden Planungs-, Überwachungs- und Kontrollfähigkeiten sowie von motivationalen Faktoren.

Effizienter Wissenserwerb erfordert die Verfügbarkeit von Fertigkeiten, welche die „Informationssuche, -verarbeitung und -speicherung initiieren, lenken und überwachen“ (Baumert & Köller 1996, 137). Darunter werden Lernstrategien verstanden im Sinne von Techniken, die selbstständiges Lernen steuern. Lernstrategien sollen helfen, Wissen effizienter aufzunehmen, tiefer zu verarbeiten und mit bestehendem Wissen zu vernetzen. Sie dienen der Unterstützung selbstgesteuerter (auch: selbstregulierter) Lernprozesse (vgl. Leopold & Leutner 2002; Leutner & Leopold 2003; Reiserer & Mandl 2002; Schreiber 1998). Neben aktuellen Forderungen nach mehr Eigenaktivität und Einbezug der Schüler werden vermehrt „Eigenständigkeit in der Planung, Überprüfung und Überwachung der eigenen Arbeit“ der Schüler gefordert, um selbstständiges Denken, das Herstellen von Zusammenhängen und den Aufbau von Vertrauen in die eigene Selbstwirksamkeit zu unterstützen (vgl. Fritz & Funke 2003, 416).

Der Begriff ‚selbstreguliertes Lernen’ stellt ein komplexes, wissenschaftlich nicht präzise definiertes Konstrukt dar, welches in Abhängigkeit der theoretischen Position zu unterschiedlich akzentuierten Modellen führt. Aus der Definitionsvielfalt ergeben sich nach verwendeter Begrifflichkeit, Methodik, Zielgruppen und zugrunde gelegtem Menschenbild unterscheidbare Forschungsrichtungen (vgl. Schreiber 1998, 9ff.). Vertreter aller Forschungsrichtungen zum selbstregulierten Lernen gehen aber grundsätzlich davon aus, dass ein größeres Maß an selbstregulativen Fähigkeiten den Wissenserwerb quantitativ und qualitativ positiv beeinflusst. Grundgedanke ist die Annahme, dass Wissenskonstruktion ein aktiver Prozess nur des Lernenden selbst sein kann. ‚Selbstregulation’ bedeutet, dass während eines selbstgesteuerten Prozesses (selbstgesteuert im Sinne von selbständiger Ausrichtung des Prozesses „auf einen selbstgesetzten Sollwert hin“) „selbständig Informationen über den augenblicklichen Ist-Wert des Prozesses herangezogen“ werden (ebd., 10). Dies bedeutet eine eigenaktive Modifizierung und Beeinflussung des Handelns. Bezogen auf den hier interessierenden *Lern*prozess bedeutet Selbstregulation in Abgrenzung zu fremdgesteuertem Lernen die eigenaktive, zielorientierte Steuerung des Lernens unter Berücksichtigung aktueller Bedingungen. Um Handlungs- und Entscheidungsspielräume aber überhaupt eigenaktiv zum Wissenserwerb nutzen und gestalten zu können, muss der Lerner über entsprechende Fertig- und Fähigkeiten verfügen: Von Interesse sind daher zum einen einzelne Komponenten und spezifische Verhaltensmerkmale selbstregulierten Lernens sowie Möglichkeiten gezielter Förderung (vgl. Brunstein & Spörer 2001, 623).

Selbstgesteuertem Lernen liegen folgende Prozesse bzw. Funktionsbereiche zugrunde (vgl. ebd.): **Kognitive Komponenten** (konzeptuelles, prozedurales und strategiespezifisches Wissen), **motivationale Komponenten** (selbstmotivierende, volitionale (willenskontrollierende), auf Ergebnis und Selbstwirksamkeit bezogene bewertende Aspekte) und **metakognitive Komponenten** (personenbezogenes Wissen, lernzielorientierte Planungs-, Kontroll- und Korrekturprozesse). Bei Selbstregulation und -kontrolle des Lernens wenden Lerner vermutlich „ihr gesamtes metakognitives Wissen über kognitive, motivationale und umgebungsbezogene Strategien“ an, um die geeignetste Lernstrategie auszuwählen (Seel 2000, 228). Nachfolgend werden zunächst allgemeine Lernstrategien (1.5.3.1) und motivational-volitionale Prozesse (1.5.3.2) in den Blick genommen, bevor anschließend bereichsspezifische, mathematische Lernstrategien diskutiert werden (1.5.3.3).

1.5.3.1 Lernstrategien

Allgemeine Lernstrategien lassen sich in drei Gruppen unterscheiden (vgl. u.a. Baumert & Köller 1996, 138ff.; Leopold & Leutner 2002, 241; Leutner & Leopold 2003, 48ff.; Reiserer & Mandl 2002, 930f.): Kognitive, metakognitive und Ressourcenstrategien.

Kognitive Lernstrategien beziehen sich auf Aufnahme, Verarbeitung und Speicherung der Wissensinhalte. Es lassen sich tiefenorientierte, verständnisbezogene Elaborations- und Organisationsstrategien und oberflächenorientierte Wiederholungsstrategien unterscheiden: Elaborationsstrategien verbinden neu erworbenes mit bereits bestehendem Wissen, Organisationsstrategien strukturieren die zu erwerbenden Wissensinhalte sinnvoll und Wiederholungsstrategien verarbeiten und verankern neues Wissen.

Ressourcenstrategien sollen das Lernen durch Nutzen innerer und äußerer Ressourcen optimieren. Erstere beziehen sich auf Zeitplanung und Regulation von Anstrengung und Aufmerksamkeit, letztere auf Lernmaterialien, Lernort und soziales Umfeld.

Metakognitive Strategien zielen weniger auf die Verarbeitung des Lernstoffes, sondern beziehen sich als „Kontrollstrategien“ (Reiserer & Mandl 2002, 931) auf Planung, Überwachung und Regulation des Lernprozesses. Meistens unbewusst ablaufende Metakognitionen können dann bewusst werden, wenn beim Lernen Probleme auftreten.

Das Konzept ‚Metakognition’ geht auf Flavell (1984) zurück, „der sich bemühte, eine Erklärung dafür zu finden, warum Kinder ihnen eigentlich bekannte Strategien häufig nicht anwenden“ und der davon ausging, dass ein effektiver Strategieeinsatz vom Wissen über die Strategien und über deren Effizienz sowie von der Qualität der Planung und Kontrolle abhänge (Fritz & Funke 2002, 7). ‚Metakognition’ stellt also einen Sammelbegriff dar für Aspekte des Wissens über die eigene Person, über spezifische Anforderungen und über die Effektivität einzelner Strategien (deklarativer Wissensaspekt) sowie für Aspekte der Planung, Steuerung und Kontrolle von Handlungen (exekutive metakognitive Prozesse) (vgl. ebd.; Hasselhorn 2001, 466).

Grundsätzlich kann ein positiver Zusammenhang zwischen Metakognition und Lern- und Behaltensleistung angenommen werden (vgl. Fritz & Funke 2002, 11; Hasselhorn & Schreblowski 2002, 24). Besonders die exekutiven Metakognitionsprozesse stehen in engem Zusammenhang mit der Lernleistung (vgl. Fritz & Hussy 2001, 98). Metakognitionen können die Lernleistung verbessern, wenn verstanden wird, dass „der Einsatz von Lernstrategien bewußte Anstrengung erfordert" und so eigene strategische Lernmöglichkeiten reflektiert werden, „so daß auf der Basis des spezifischen und relationalen Strategiewissens konkrete strategische Verhaltensmöglichkeiten ins Bewußtsein kommen" (Hasselhorn 1992, 45f.). Auf diese Weise wird über Strategieauswahl und -einsatz entschieden und die Durchführung überwacht. Um metakognitive Prozesse anzuregen, sollten entsprechende Bemühungen an bereichsspezifische Fertigkeiten gekoppelt werden (vgl. Hasselhorn 2001, 470).

Unter bestimmten Umständen wie beispielsweise bei einfachen, automatisiert abrufbaren Rechenfakten bewirkt die Nutzung von Metakognitionen allerdings keine besseren oder schnelleren Lernleistungen, sondern verlängert die Lernzeit (vgl. ebd., 468). Zudem ist erfolgreiches Lernen von der subjektiv wahrgenommenen Aufgabenschwierigkeit abhängig: So hat sich gezeigt, dass Metakognitionen die Lernleistung nur innerhalb eines mittleren subjektiven Aufgabenschwierigkeitsgrades verbessern (vgl. Hasselhorn 1992, 47). Mögliche Ursachen für eine unzureichende Nutzung von Metakognitionen lassen sich den drei folgenden Klassen zuordnen (vgl. ebd., 50):

1. Defizite im metakognitiven Bereich
2. Motivationsprobleme
3. Mangelnde inhaltsspezifische Vorkenntnisse

Allerdings muss bereichsspezifisches Vorwissen nicht immer Voraussetzung für metakognitiv gesteuertes Lernen sein:

> „Bei metakognitiven Kompetenzen handelt es sich vielmehr um eine zentrale Lernkompetenz, die Schüler in die Lage versetzen kann, Defizite bei anderen Lernvoraussetzungen wie z.B. fachspezifischen Vorkenntnissen zumindest teilweise zu kompensieren." (ebd., 55)

Das bedeutet zum einen, dass Metakognition als Schlüsselkompetenz große Bedeutung für erfolgreiches Lernen zukommt und zum anderen, dass geringes Vorwissen keinen Grund darstellt, die Förderung metakonitiver Kompetenzen zunächst zurückzustellen.

Grundsätzlich sind an metakognitiver Planung, Überwachung und Regulation folgende Teilprozesse beteiligt (vgl. Fritz & Funke 2002, 8f.; Fritz & Funke 2003, 417f.):

- Antizipation des Ziels und damit verbunden intentionale Handlung
- Aufgabenanalyse und Repräsentation des Problemfeldes (Was ist das Ziel? Was weiß ich bereits? Was ist gefordert?)
- Planungsbereitschaft: Ob Planungsprozesse einsetzen, hängt von der Motivation und damit von Erfolgszuversicht und Anstrengungsbereitschaft ab.
- Erstellen des Handlungsplanes unter Berücksichtigung spezifischer Bedingungen (Welche Strategien können eingesetzt werden? In welcher Reihenfolge kann was wie bearbeitet werden?)
- Volitionale Prozesse als Bereitschaft, Absichten in Handlung umzusetzen, sind Voraussetzung für die Anwendung von Planungs- und Kontrollprozessen. Neben dem Wissen über effektiven Strategieeinsatz ist also „die Überzeugung zu vermitteln, sich selbst Kompetenzen in der Bewältigung derartiger Anforderungen zuzuschreiben (Selbstwirksamkeitserwartungen)“ (Fritz & Funke 2002, 9).
- Überwachung und Regulation der Handlungsausführung: Koordination der Teilpläne, Re-Evaluation des Problemes durch Integration neuer Erfahrungen während des Handelns, auftretende Fehler bemerken, evtl. den Plan verändern
- Nach Abschluss der Handlung Evaluation der Handlungsausführung

Im Zusammenhang mit Lernschwierigkeiten kommt exekutiven Metakognitionsprozessen große Bedeutung zu, da sich gezeigt hat, dass lernschwache Kinder ihr Vorgehen nur unzureichend planen, kontrollieren und reflektieren (vgl. ebd., 11; Fritz & Funke 2003, 422). Dies hat gravierende Auswirkungen auf die weitere kognitive Entwicklung:

> „Wenig gezielte, strukturierte und reflektierte Lernerfahrungen bleiben bruchstückhaft, unzureichend ausgewertet und können nicht stabil mit Vorwissensinhalten im Gedächtnis verknüpft werden.“ (Fritz & Hussy 2001, 98).

Ebenso wie bereichsspezifische Voraussetzungen entwickelt sich auch Planungsfähigkeit in der frühen Kindheit und hängt wesentlich von *Möglichkeiten* zu lernen, individuellen und Umweltbedingungen ab (vgl. Fritz & Funke 2003, 421). Lernbeeinträchtigte Kinder zeigen häufig folgende Verhaltensweisen in Bezug auf Planungsprozesse (vgl. Fritz & Funke 2002, 11f.):

- Spontane Aufgabenbearbeitung ohne vorherige Planung
- Fehlende begleitende Prüfprozesse
- Fehlende abschließende Kontrolle

- Zu knappe und/oder inadäquate Zeiteinteilung
- Seltene Wahl regelhafter Strategien / Vorgehensweisen
- Häufiger Einsatz ineffektiver Strategien
- Unzureichendes Strategiewissen
- Mangelnde Fähigkeit zur Einschätzung von Schwierigkeitsgraden
- Mangelnde Anstrengungsanpassung an Aufgaben (bei schwieriger werdenden Aufgaben werden die Anstrengungen nicht gesteigert)

Dagegen weisen erfolgreiche Lerner folgende Merkmale auf (vgl. ebd., 12):

- Breites Repertoire anwendbarer, z.T. automatisierter Strategien
- Ausgeprägtes Selbstmanagement befähigt zu gezielter Strategieauswahl und zu guter Steuerung und Kontrolle des Handelns
- Erfolg wird auf eigene Anstrengungen zurückgeführt
- Positives Selbstkonzept hilft Misserfolge zu verarbeiten und Fehler als Möglichkeit zur Veresserung des Selbstmanagements zu nutzen.

Für effektives Lernen ist neben adäquaten metakognitiven Planungs- und Kontrollprozessen auch Wissen darüber notwendig, welche spezifischen Strategien in welcher Situation in welcher Weise eingesetzt werden können. Dabei stellt sich die Frage, wie Denken und Handeln bzw. das Ausführen der Prozeduren effektiv miteinander kooordiniert werden können: Als koordinierendes und verbindendes Glied zwischen metakognitivem Wissen über Aufgabenanforderungen und über personenspezifische Ressourcen und metakognitiver Kontrolle, also der Selbststeuerung gilt die **Reflexion** (vgl. Seel 2000, 231f.): Dadurch kann das, was man über das Lernen weiß (metakognitives Wissen) übertragen werden auf das, was man beim Lernen tut (Selbstregulation) und so kann das Lernen während des Lernens überschaut werden. Aebli (1980, 22ff.; s.o.) bezeichnet Reflexion als Handlung und Denkprozesse steuernde Metatätigkeit.

Anwendung und Effizienz von **Lernstrategien** sind stark vorwissensabhängig und entwickeln sich mit zunehmendem Wissenserwerb (vgl. Reiserer & Mandl 2002, 931). Dabei wird heute von einer bidirektionalen Beeinflussungsrichtung zwischen Wissen und Strategien ausgegangen: „Bereichsspezifisches Wissen ist Voraussetzung des Strategieerwerbs, und die Nutzung von Lernstrategien erleichtert die Aneignung neuen Wissens.“ (Baumert & Köller 1996, 141). Kinder mit Lernbeeinträchtigungen weisen häufig Defizite im Vorwissen und in bereichsspezifischen Voraussetzungen auf (vgl. Krajewski 2003; von Aster 1996). Dies kann die häufige defizitäre Strategieanwendung lernschwacher Kinder erklären. Lenbeeinträchtigte Kinder weisen zudem häufig ein wenig umfangreiches Strategierepertoire und mangelnde Flexibilität bei der Anwendung von Strategien auf (vgl. Fritz & Hussy 2001, 99). Selbstregulationskompetenzen, also auch der Einsatz von Strategien sind aber erwiesenermaßen durchaus förderbar und langfristig wirksam (vgl. Gürtler et al. 2002). Neben kognitiven, ressourcenbezogenen und metakognitiven Lernstrategien kommt dabei auch motivationalen und volitionalen Konzepten und spezifischen mathematischen Problemlösestrategien große Bedeutung zu (vgl. ebd.). Denn Wissen über und Verfügbarkeit von Lernstrategien allein bewirken nicht unbedingt auch deren *Anwendung* – wichtig sind dazu ebenso die Überzeugung von der Kontrollierbarkeit des Lernprozesses und von ausreichenden persönlichen Ressourcen, die Wertschätzung systematischen Vorgehens und die Überzeugung von der Nützlichkeit der Strategien, inhaltlich gerichtete Motivation sowie volitionale Kontrolle zur Aufrechterhaltung der Motivation bei konkurrierenden Zielen oder schwacher Intention (vgl. Baumert & Köller 1996, 142).

1.5.3.2 Motivation & Volition

Da kognitive Prozesse ohne stützende motivationale Komponenten wenig effektiv sind, gerade diese Voraussetzungen bei lernbeeinträchtigten Kindern jedoch unzureichend sind, müssen auch motivationale Prozesse für Unterricht und Förderung berücksichtigt werden (vgl. Fritz & Hussy 2001, 100). In der Pädagogischen Psychologie kann in dieser oder ähnlicher Form folgende Definition von Motivation gelten: „Motivation bezeichnet diejenigen psychischen Prozesse, die die Einleitung und Aufrechterhaltung zielbezogenen Handelns leisten.“ (Ziegler 1999, 103) Motivation richtet also die Handlungen eines Lernenden aus auf „zukünftige Zielzustände“ (Holodynski & Oerter 2002, 553), so dass Intentionalität ein zentrales Kennzeichen solcher Verhaltenssteuerung ist.

Bemühung und Anstrengung gelten neben den Komponenten ‚Fähigkeit’ und ‚Vorkenntnisse’ zu den zentralen Einflussfaktoren des Lernens (vgl. Heider 1958; zit. n. Rheinberg 2001, 478). So nehmen Wild & Remy (2002) an, dass in der TIMS-Studie festgestellte Defizite in konzeptuellem Verständnis auch auf rückläufige intrinsische Motivation und Lernfreude bereits am Ende der Grundschulzeit zurückzuführen sind. Die Entwicklung selbstbestimmter Lernmotivation hängt dabei nicht nur von schulischen Faktoren, sondern ebenso von familiären Sozialisationsbedingungen ab.

Lernmotivation lässt sich nicht nur quantitativ messen und unterscheiden, sondern auch qualitativ nach Motivations*art* (vgl. ebd., 29). Konzeptionen schulischer Lernmotivation lassen sich unterschiedlichen theoretischen Ansätzen zuordnen: Wild & Remy

(2002) geben einen Überblick über drei zentrale theoretische Ansätze und untersuchen so Lernmotivation aus der Perspektive der Person-Gegenstands-Theorie des Interesses, Lernmotivation aus der Perspektive der Zielorientierungen und Lernmotivation aus der Perspektive der Selbstbestimmungstheorie (vgl. Deci & Ryan 1985).

Nach der **Person-Gegenstands-Theorie des Interesses** wird intrinsische schulische Lernmotivation v.a. durch inhaltsspezifisches Interesse bestimmt (vgl. Wild & Remy 2002, 30). Ebenfalls motivational relevante Faktoren bestehen in der Art der **Zielorientierungen**, die die Autorinnen in ihrer Studie unterscheiden nach Aufgabenorientierung in Form eines Bestrebens nach Wissenserweiterung, nach Vermeidung negativer sozialer Konsequenzen sowie nach Ich-Orientierung als Ausdruck des Wunsches, von Bezugspersonen als kompetent wahrgenommen zu werden (vgl. ebd., 32).

Nach der **Selbstbestimmungstheorie** wird effektives und qualifiziertes Lernen nur durch individuelles Engagement erreicht: „Effektives Lernen ist auf intrinsische Motivation und/oder integrierte Selbstregulation angewiesen.“ (Deci & Ryan 1993, 233) Nach dieser Theorie hat besonders eine „auf Selbstbestimmung beruhende Lernmotivation positive Wirkungen auf die Qualität des Lernens“ (ebd., 223). Motivation wird neben Emotionen und physiologischen Bedürfnissen (Triebe) durch psychologische Bedürfnisse beeinflusst: Nach Deci & Ryan (ebd., 229) sind für sowohl intrinsische als auch für extrinsische Motivation besonders folgende drei angeborene psychologische Bedürfnisse ausschlaggebend:

1. Bedürfnis nach Kompetenz bzw. Wirksamkeit
2. Bedürfnis nach Autonomie bzw. Selbstbestimmung
3. soziale Eingebundenheit oder Zugehörigkeit als „angeborene motivationale Tendenz […], sich mit anderen Personen in einem sozialen Milieu verbunden zu fühlen“.

Motivation entsteht bzw. besteht also, wenn das Individuum Kompetenz, Selbstbestimmtheit und soziale Akzeptanz erlebt. Unter diesen Gesichtspunkten kann der Grad an Motivationspotential eines Handlungsziels erklärt werden. Insofern ist die Selbstbestimmungstheorie eng an Konzepte der Selbstregulation gebunden.

Neben der Gegenüberstellung von intrinsischer und extrinsischer Motivation weisen Wild & Remy (2002, 29f.) darauf hin, dass in neueren Arbeiten auf der Grundlage der Selbstbestimungstheorie „verstärkt eine Unterscheidung verschiedener Formen der extrinsischen Motivation nach dem Grad des Erlebens von Selbstbestimmung thematisiert“ wird: Damit werde berücksichtigt, dass rein intrinsische Motivation, hervorzurufen nur durch Interesse am Lerngegenstand selbst, zwar wünschenswert, aber nicht immer erreicht bzw. erwartet werden könne. Daher werden motivationale Formen gesucht, die nicht aus Spaß, sondern aus dem Beimessen persönlicher Bedeutung bzw. durch Einsicht in die Bedeutung eines Lernstoffes Lernhandlungen unterstützen können. Da diese sogenannten „identifiziert regulierten“ Lernhandlungen mit „einem hohen Autonomieerleben verbunden sind“, unterscheiden Wild & Remy (ebd., 30) zwischen identifizierter Lernmotivation als einer eher selbstbestimmten und extrinsischer Lernmotivation als einer eher fremdbestimmten Form der Motivation.

Fehlt motivationaler Anreiz zur Auseinandersetzung mit einem Inhalt, kann Beschäftigung bewusst willentlich, also volitional gesteuert und durchgesetzt werden: Orientiert sich der Lernende beispielsweise an einem persönlich bedeutsamen Fernziel, kann er durch „hochgradig organisierte Willensprozesse“ die notwendigen Operationen „quasi ‚von oben’ steuern und überwachen“ (Rheinberg 1996, 42). Trotz ausreichender Motivation oder volitionaler Steuerung kann eine Handlungsdurchführung dennoch durch alternative, attraktivere Handlungsalternativen und durch mangelnde subjektive Erfolgszuversicht verhindert werden (vgl. Ziegler 1999, 104). Neben der Einschätzung eigener Kompetenzen, Ressourcen und Kapazitäten zählt das „Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit […] zu den stärksten und eindeutigsten Prädiktoren der Schulleistung“ (Fritz & Hussy 2001, 99).

Daher sind Bemühungen um den „Abbau habitueller und unrealistischer Misserfolgsfurcht, die Förderung erfolgszuversichtlicher Kompetenzmotivation sowie die Entwicklung selbstbestimmter Interessen“ pädagogisch begründbar (Rheinberg 2001, 481). Misserfolgsängstliche Ausrichtungen von Leistungsmotivation sind auf drei sich wechselseitig stabilisierende Komponenten zurückzuführen (vgl. Heckhausen 1975; zit. n. Rheinberg 2001, 479):

1. Unrealistische Zielsetzung (zu einfach oder zu schwierig)
2. Attributionstendenz, Erfolge auf Aufgabenleichtigkeit oder Glück und Misserfolge auf persönlichen Fähigkeitsmangel zurückzuführen
3. Aus 2. resultierende negative Selbstbewertungsbilanz, da man auf Erfolge kaum stolz sein kann, Misserfolge aber auf eigene Unfähigkeit bezogen werden.

Um erfolgszuversichtliche Perspektiven und optimistische Ursachenerklärungen zu betonen, wird die Orientierung an individuellen Bezugsnormen empfohlen (vgl. Rheinberg 2001, 480): Wird Lernzuwachs unter individuellen Bedingungen, also nicht als Vergleich mit anderen Personen (soziale Bezugsnorm) gesehen, können realistische Zielsetzungen erfolgreicher angebahnt werden und kann Freude über individuellen Lernzuwachs zugelassen werden. Neben den Bedingungen ausreichender Motivation oder volitionaler Steuerung und genügend Erfolgszuversicht ist die Handlungsausführung jedoch immer auch von adäquaten exekutiven metakognitiven Prozessen abhängig (s. 1.5.3.1).

Insgesamt sollten motivational-affektive Variabeln in ihrer Bedeutung für die Schulleistung nicht unterschätzt werden, da deren prognostischer Wert häufig kaum oder nicht unter dem kognitiver Bedingungsvariabeln liegt (vgl. Helmke 1992, 26). Im Rahmen der SCHOLASTIK-Studie gewonnene Befunde für das Grundschulalter belegen zwar einen „überragende[n] Stellenwert kognitiver Eingangsbedingungen, verglichen mit der Wichtigkeit motivationaler Schülermerkmale“ (Helmke 1997a, 215). Rheinberg (1997, 218) weist allerdings darauf hin, dass die kognitiven Variabeln ‚Intelligenz’ und ‚Vorwissen’ zwar „substantiell mit Schulleistung auch *ohne* besondere Berücksichtigung von situativen Umständen“ korrelieren, motivational-affektive Variabeln dagegen kaum oder gar nicht. Einflüsse von situativen Faktoren wurden aber in der entsprechenden Untersuchung nicht berücksichtigt, motivational-affektive Faktoren sind jedoch im Gegensatz zu Fähigkeitsfaktoren „höchst variabel und sensibel gegenüber situativen Besonderheiten.“ (ebd.). Das bedeutet, dass bestimmte – im Detail bisher nicht bekannte – spezifische Unterrichtsbedingungen motivationsförderlich bzw. -schädlich wirken. Es lassen sich jedoch grundsätzlich günstige Merkmale der Bedingungsvariable ‚Lehrerverhalten’ identifizieren: „Hohe Leistungserwartungen, intensive individuelle Hilfen, klarer Unterricht, ausgeprägte Lehrstofforientierung, Toleranz von Langsamkeit und effizientes Management“ (Helmke 1992, 28).

1.5.3.3 Mathematikspezifische Strategien

Da der Erwerb mathematischer Kompetenzen wie gezeigt in frühester Kindheit beginnt, verfügen Kinder bereits vorschulisch über Vorstellungen zu Zahlen, Mengen und auch häufig zu Rechenoperationen. Bei der Auseinandersetzung mit mathematikspezifischen Sachverhalten wenden sie unterschiedliche, individuell ohne systematische Vermittlung entdeckte und entwickelte Vorgehensweisen und Strategien an.

Im Mathematikunterricht müssen sich die Kinder dann systematischer mit Mathematik auseinander setzen. Dabei kann zwischen Fakten-, Prozeduren- und Strategiewissen unterschieden werden. Faktenwissen stellt gedächtnismäßig verankertes, schnell abrufbares Wissen dar. Rechenverfahren werden im Sinne prozeduralen Wissens als bestimmte Wege oder schrittweise Verfahren zum Lösen arithmetischer Fragestellungen und Rechenstrategien werden im Sinne konzeptuellen Wissens als Fähigkeit, flexibel und problemadäquat geeignete Lösungsverfahren *auszuwählen* verstanden (vgl. Lorenz 1998, 62; Stern 1996, 401). Eine Prozedur ist durch eine sukzessive Abfolge nicht variabler Handlungsfolgen gekennzeichnet und eine Strategie durch Flexibilität:

> „Mathematische Prozeduren sind an bestimmte Aufgabentypen gebunden, die lediglich den Nah-Transfer auf ähnliche Aufgabentypen bewirken. Strategisches Vorgehen besteht in der auf die Bewältigung der Anforderung optimal abgestimmten Auswahl von Prozeduren." (Stern 1996, 401).

Um sinnentleertem Auswendiglernen, der Entwicklung ineffektiver Kompensationsstrategien und uneinsichtiger Regelanwendung vorzubeugen, ist es notwendig, Kindern effektive Prozeduren und deren sinnvollen Einsatz zu vermitteln.

Welche Verfahren in welcher Häufigkeit im Vorschulalter bei Kindern zu beobachten sind und inwiefern diese strategisch ausgewählt und eingesetzt werden, wurde in verschiedenen Studien untersucht: Unter Bezug auf Untersuchungen von Siegler & Robinson (1982) stellen Oerter & Dreher (2002, 474f.) dar, dass Kinder im Vorschulalter neben zählenden Strategien in 64 Prozent der Versuche auf Gedächtnisinhalte zurückgriffen, also gespeicherte Rechenfakten abriefen. Als Zählstrategien wurden in der Untersuchung unterschieden: Zahlendarstellung an Fingern, verbales Zählen und Fingerzählen. Dass die Kinder mehrere oder zum Teil sogar alle dieser Strategien anwendeten, lässt darauf schließen, dass sie zwischen Strategien nach Gesichtspunkten der Effektivität und Situativität auswählen konnten, dies aufgrund der Schnelligkeit des Strategieeinsatzes allerdings unbewusst (vgl. ebd.).

Solange Kinder nicht auf gespeicherte Rechenfakten zurückgreifen können und auf konkrete Darstellungen oder Handlungen zum Rechnen angewiesen sind, wenden sie vor allem zählende Rechenstrategien an, indem sie beispielsweise eine direkte Verbindung zwischen Menge und Zahlwort herstellen (vgl. Krajewski 2003, 70ff.). Darüber gelingt es fast allen Kindern, ohne Anleitung zu addieren oder zu subtrahieren (vgl. 1.4.3). Rechnen und Zählen sind also eng miteinander verbunden, da besonders Additionsaufgaben auf auszählende Vorgehensweisen zurückgeführt werden können. Auf der Basis ihres angeborenen und im Verlauf der Vorschulzeit durch Erfahrungsauswertung ausgebauten Wissens entwickeln die meisten Kinder Strategien bzw. Verfahren, die sie zur Bewältigung von Rechenaufgaben unterschiedlichster Art mehr oder weniger strategisch sinnvoll einsetzen.

Kinder sind bereits vorschulisch zum Aufbau zentraler mathematischer Prinzipien wie Kommutativität, Komplementarität von Addition und Subtraktion und Assoziativität auf der Grundlage ihres intuitiven Zahl- und Mengenwissens fähig (vgl. Resnick 1989, 164ff.): Zuerst werden konkrete Objekte gezählt; auch und besonders die eigenen Finger werden dabei benutzt, um Rechenaufgaben zählend zu lösen. Bei Additionen werden häufig den beiden Summanden entsprechende Objektmengen gebildet, diese werden zusammengeschoben und die entstandene Gesamtmenge ausgezählt (count all). Bei Subtraktionen wird die Startmenge gebildet, die zu subtrahierende Menge abgezählt und entfernt und die verbleibende Menge als Ergebnis ausgezählt. Können schließlich die Zahlworte selbst gezählt werden (~ Stufe 4, vgl. 1.4.3.2), wird mentales Zählen und damit effektives und flexibles Lösen von Additionen und Subtraktionen möglich. Auf dieser Basis entwickeln die meisten Kinder im Alter von etwa 6 Jahren selbst eine Strategie, welche den Zählaufwand verringert: Sie gehen vom zunächst ersten, später vom größeren Summanden aus ohne diesen selbst noch auszuzählen und zählen von dort um so viele Schritte wie der andere Summand groß ist *weiter* (count on). Das Weiterzählen vom ersten Summanden wird auch als Min-Methode bezeichnet (vgl. Oerter & Dreher 2002, 475). Weiterzählstrategien bedeuten bereits ein erstes Verständnis von Teilmengen. Wird die Strategie des Weiterzählens vom *größeren* Summanden unabhängig von der ursprünglichen Reihenfolge der beiden Summanden angewandt, bedeutet dies darüber hinaus ein implizites Verständnis von Kommutativität der Addition ($a+b=b+a$).

Für die Bearbeitung subtraktiver Anforderungen wenden viele Kinder im Alter von etwa 9 Jahren bereits zwei unterschiedliche Verfahren an in Abhängigkeit von den beteiligten Zahlen: Aufgaben der Form $9-2$ werden rückwärtszählend gelöst: „9 – 8, 7. Die Antwort ist 7." Dies ist strategisch sinnvoll, da der Zählaufwand gering ist. Dagegen wird bei Aufgaben der Form $9-7$, bei denen der Zählaufwand durch Rückwärtszählen sehr viel größer wäre, häufig eine andere Prozedur des Vorwärtszählens gewählt: „7 – 8, 9. Die Antwort ist 2." Letzteres Beispiel stellt also eine Umwandlung einer Subtraktionsaufgabe in eine spezielle Additionsaufgabe, bei der der zweite Summand unbekannt ist, dar und spiegelt so bereits ein tiefes Verständnis von Mathematik wider.

Dass Kinder solche Verfahren entwickeln und dass sie zumindest unbewusst wissen, dass dies richtig ist, führt Resnick (1989, 165) auf elementare, intuitive Kenntnisse zurück: Die am Subtraktionsbeispiel gezeigte Fähigkeit zur Umformung gründet sich danach auf ein zentrales Zahlprinzip, das Prinzip der additiven Komposition von Zahlen. Damit beruht diese Umformung auf einem – wahrscheinlich noch impliziten – Verständnis von der Komplementarität von Addition und Subtraktion und dieses Wissen basiert wiederum auf der Einsicht, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind und dass jede Zahl in andere Zahlen zerlegt werden kann. Diese Einsicht entwickelt sich aus dem protoquantitativen Teile-Ganzes-Schema (vgl. 1.4.1). Kann ein solches umformendes Vorgehen wie oben dargestellt beobachtet werden, gilt dies als Anzeichen dafür, dass das Zählwissen erfolgreich mit dem protoquantitativen Teile-Ganzes-Schema verknüpft worden ist. Resnick (1989, 166) geht nach Sichtung zahlreicher kulturvergleichender Studien zu Rechenstrategien und zu Zahlwortbildung davon aus, dass dem Prinzip der additiven Komposition universaler Charakter zukommt: So offenbaren von unbeschulten Personen praktizierte Rechenverfahren ein generelles Verständnis von der additiven Komposition von Zahlen sowie von Prinzipien der Kommutativität, Komplementarität und Assoziativität. Die Zahlwortbildung wiederum ist in nahezu allen untersuchten Kulturen gekennzeichnet durch die Zusammensetzung von Zahlen größer 10 aus kleineren Zahlen. Im Gegensatz dazu sind beispielsweise multiplikative Anforderungen sowie die Auseinandersetzung mit Proportionen und Verhältnissen weniger „natürlich“, da sie ohne systematische Unterweisung kaum auftreten und sehr spezifische Erfahrungen erfordern. Die „natürlichen“ Verfahren werden nicht in einer hierarchischen Abfolge erworben und angewandt – wobei eine gewisse Hierarchie wie in 1.4.3.2 gezeigt notwendig ist, da Teilfertigkeiten logisch aufeinander aufbauen – vielmehr setzen Kinder dieses situationsentsprechend ein (vgl. Dehaene 1999, 144; Padberg 1996, 76ff.). Das bedeutet, dass Kinder in der Regel über mehrere Strategien gleichzeitig verfügen.

Das zu Beginn normale und wichtige zählende Vorgehen darf jedoch nicht die einzige Lösungstechnik bleiben, sondern muss im Hinblick auf einsichtiges Lernen, größere Zahlenräume und effizientere Strategien durch das Vorgehen nach heuristischen Strategien in Form allgemeiner Problemlösekonzepte sowie inhaltlich in Form von Ableitungsstrategien, Zerlegungen o.Ä. erweitert werden. Zählverfahren verlieren ihre Bedeutung nicht, sie werden lediglich im Lauf der Zeit zum Teil durch effektivere Strategien abgelöst oder mit diesen vermischt und werden selbst rationeller (vgl. Radatz & Schipper 1983, 65f.). Situativ sinnvolle und weiterführende Verfahren werden in 3.3.3.1 ausführlich dargestellt.

Allgemein in Bezug auf die Art des Erwerbs von Strategien und deren Einsatz muss besonders betont werden, dass Entwicklung sich nicht in Form qualitativer Sprünge zeigt, sondern vielmehr in „allmählichem Strategiewechsel“ (Stern 2002, 35f.; s. auch Stern 1996, 401): Neue Strategien lösen also alte nicht abrupt ab, sondern werden eine zeitlang parallel eingesetzt, um als effektivere Zugänge allmählich weniger effektive

Strategien abzulösen. Stern (2002, 35f.) betont einen nicht zu vernachlässigenden funktionalen Vorteil einer solchen parallelen Verfügbarkeit unterschiedlich effektiver Strategien: „Adaptiv verhalten kann sich nur, wer auf ein breites Repertoire an Strategien zurückgreifen kann.“ Dieses wiederum ist nur dann effektiv nutzbar, wenn Strategien flexibel eingesetzt und auf neue Situationen transferiert werden können.

Wesentliche Voraussetzungen für *effektiven* Strategieeinsatz sind Verständnis der Strategie, Wissen über deren sinnvollen Einsatz, Verständnis darüber, was überhaupt als geschickt anzusehen ist (z.B. sinnvolles Vereinfachen von Zahlen zum einfacheren näherungsweisen Rechnen) und die Fähigkeit, abzuschätzen, wann mehr oder weniger Genauigkeit für die Zielerreichung erforderlich ist (vgl. Krauthausen 2003, 89).

Ein effektiver und situationsgerechter Einsatz von Strategien ist auch vorwissensabhängig, da erst dieses „erlaubt, die relevanten Inhalte zu selegieren, auf die die Strategien angewandt werden“ (Renkl 1996, 179). Die Bedeutung einer ausreichenden Vorwissensbasis für effektiven Einsatz von Rechenstrategien wird nachfolgend diskutiert.

1.6 Lernbedingungen bei Schulbeginn: Vorwissen und Lernbeeinträchtigungen

Wissenserwerb aus konstruktivistischer Perspektive wird als aktive Bedeutungskonstruktion des Individuums verstanden. Diese Konstruktion basiert auch auf individuell vorhandenen Vorerfahrungen (vgl. Möller 2001, 20). Der Wissenserwerb verläuft in Abhängigkeit dieser und anderer Bedingungen unterschiedlich erfolgreich. So finden sich in der Schule immer einige Kinder, denen das (Mathematik-)Lernen schwerer fällt.

Im Vergleich zu weniger erfolgreichen Lernern beruht die qualitativ und quantitativ bessere Aufnahme spezifischer Information erfolgreicherer Lerner auf deren großem, bereichsspezifischem Vorwissen. Dies wird als Matthäus-Effekt bezeichnet: „Wer schon viel weiß, kann auch viel dazu lernen; wer wenig weiß, kann auch kaum etwas lernen.“ (Renkl 1996, 175). Das bedeutet in der Terminologie Piagets:

> „Je mehr Wissen eine Person bereits besitzt, desto mehr neue Informationen kann sie assimilieren, also in bereits bestehende kognitive Strukturen einordnen. Auch die Rekonstruktion von Wissen im Sinne einer Akkomodation gelingt eher, wenn die neuen Informationen nicht zu stark mit dem vorhandenen Wissen konfligieren; die Wahrscheinlichkeit ‚zu großer’ Konflikte […] ist bei Personen mit gutem Wissensstand wiederum geringer, so daß diesen eher Akkomodationen gelingen können.“ (Renkl 1996, 178).

Kontrastive Untersuchungen aus der Expertiseforschung untersuchen z.B. Unterschiede und Ähnlichkeiten in den kognitiven Strukturen und der Informationsverarbeitung zwischen Experten und Novizen: Experten zeichnen sich durch rasche und korrekte Wahrnehmung und Erinnerung domänenspezifischer Information aus, deren gutes Problemlösen zeigt sich u.a. darin, dass schnell relevantes Vorwissen erinnert werden kann (vgl. Gruber 2001, 165ff.). Der Befund überlegener Gedächtnisleistungen von Experten wird durch Organisationsprozesse der Speicherung und des Abrufens von Informationen erklärt. Die Fähigkeit von Experten, neue Information zügig in Langzeitspeicher zu übertragen erhöht die Nutzbarkeit dieses Wissens beträchtlich. Diese Experten-Novizen-Vergleiche stellen also die Bedeutung der Organisation der Wissensstrukturen heraus. Umfang und Organisation des bereichsspezifischen Vorwissens beeinflussen erheblich das Lösen domänenspezifischer Probleme und sind somit hinreichende Bedingung für Expertise-Erwerb (vgl. ebd., 167).

Unterschiede zwischen Experten und Novizen bestehen also quantitativ im Umfang des Wissens und qualitativ in der Organisation dieses Wissens. Dies unterstreicht die Bedeutung des bereichsspezifischen Vorwissens für erfolgreiches weiteres Lernen, welches stärker zu den wesentlichen Bedingungsfaktoren der Schulleistung zählt als allgemeinere Fähigkeiten wie Intelligenz (vgl. Gruber 1999; Helmke 1992; Krajewski 2003; Renkl 1996; Stern 1998). Die bereichsspezifischen Voraussetzungen und Vorkenntnisse von Schulanfängern wirken sich also auf die späteren Schulleistungen aus, indem das Vorwissen bei der Aufnahme schulisch vermittelten Stoffes wie ein Filter wirkt. Zudem belegen Befunde von Krajewski (2003) und Weißhaupt et al. (2006), dass bereichsspezifisches Wissen im Vorschulalter die Mathematikleistungen bis zum Ende des zweiten Schuljahres in großem Umfang vorhersagt.

Bevor das Problemfeld beeinträchtigten mathematischen Fertigkeitserwerbs (vgl. 1.6.2) umrissen wird, soll zunächst vorgestellt werden, mit welchem mathematischen Vorwissen Kinder *in der Regel* eingeschult werden.

1.6.1 Mathematisches Vorwissen von Schulanfängern

Bei Schuleintritt haben sich die meisten Kinder ausgehend von ihrem genetisch vorbereiteten Wissen mit mathematischen Erscheinungen ihrer Umwelt in vielfacher Weise auseinandergesetzt und darüber vielfältige mathematische Kompetenzen aufgebaut: Kleine Kinder verfügen über eine angeborene Sensitivität für Quantitäten und quantitative Veränderungen. Sie können Objekte individuieren und kleine Anzahlen simultan erfassen. Sie lernen mit Beginn der Sprachentwicklung relativ schnell erste Abschnitte der Zahlwortreihe. Ebenfalls vorschulisch erwerben sie wesentliche Zählprinzipien.

Vorschulkinder haben (protoquantitative) Vorstellungen über den Vergleich, über das Vergrößern und Verkleinern von Mengen und über ein grundsätzliches Verständnis von Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen (ein Kuchen kann in Teile zerschnitten werden, alle Teile zusammen ergeben einen ganzen Kuchen, entfernt man ein Kuchenstück, so wird der ganze Kuchen weniger etc.). Damit verfügen sie schon sehr früh über intuitive Vorstellungen von Addition und Subtraktion. Entwicklungsfortschritt besteht dabei in einer *Verknüpfung* der zwei grundlegenden Wissenssysteme ‚Zählen' und ‚Mengenbeurteilungen' (vgl. 1.41 und 1.4.3). Wie Baroody (1986, 289) in seiner Übersicht entsprechender Befunde zusammenfasst, gibt es Belege dafür, dass kleine Kinder auch schon das Kardinalprinzip erwerben sowie kardinale Modelle erstellen können, indem sie Zahlen als Fingerbilder repräsentieren. Dies bedeutet, dass die meisten Kinder zumindest teilweise Mengen- und Zählkonzepte miteinander verbunden haben und den Verwendungszweck des Zählens durchschauen.

Obwohl davon auszugehen ist, dass Kinder bereits mit umfangreichem Vorwissen zur Schule kommen, darf nicht übersehen werden, dass sie individuell geprägte Entwicklungsverläufe aufweisen und dass sie sich bei der Einschulung auf sehr unterschiedlichem Niveau befinden können. Das Wissen über die Vorkenntnisse der einzelnen Schüler ermöglicht es dem Lehrer, eine der Heterogenität der Lerngruppe angemessene Planung und Gestaltung des Unterrichts vorzunehmen und am Wissensstand der Kinder anzuknüpfen. Empirische Untersuchungen zur Erfassung von Schülervorkenntnissen sollen Aussagen über das Anknüpfungsniveau ermöglichen und gegebenenfalls curriculare Änderungen begründen.

Anfang der 1980-er Jahre (z.B. Schmidt & Weiser 1982) und Mitte der 1990-er Jahre (z.B. Hengartner & Röthlisberger 1995; van den Heuvel-Panhuizen 1995; Selter 1995) wurden in diesem Sinne diverse Studien zu Vorkenntnissen von Schulanfängern durchgeführt. Dabei wurde beispielsweise gezeigt, dass das protoquantitative Vergleichsschema von den Schulanfängern weitestgehend beherrscht wird, die Leistungen bei Anforderungen wie Ziffernkenntnis, Rückwärtszählen, Abzählen, Additions- und Subtraktionsaufgaben in Kontexten jedoch sehr breit streuen (vgl. Schipper 1998). Exemplarisch sollen die wesentlichen Ergebnisse der Studie von Hengartner & Röthlisberger (1995) und von Grassmann (2002) vorgestellt werden.

Hengartner & Röthlisberger (1995) erhoben die Vorkenntnisse von 198 Schulanfängern in 2 Schweizer Kantonen drei bis vier Wochen nach Schulbeginn. Diese Erhebungen erbrachten folgende Resultate (vgl. ebd., 71ff.):

- Vier Fünftel der Kinder konnten vorwärts im Zehnerraum zählen, etwas weniger rückwärts ab 10
- Mit Zählmöglichkeit konnten knapp vier Fünftel der Kinder bis 10 addieren, ohne Zählmöglichkeiten konnte dies etwa die Hälfte der Kinder
- Ohne Zählmöglichkeit, jedoch in der konkreten Vorstellung von Geldbeträgen konnten über 40% der Kinder von 10 subtrahieren
- Etwa ein Drittel der Kinder konnte die Anzahl von 18 teilweise verdeckten Büchsen bestimmen; dabei musste die Anzahl z.T. aus der geometrischen Anordnung erschlossen werden
- Knapp die Hälfte der Kinder konnte ohne Zählmöglichkeit aber mit Wahlmöglichkeit der Summanden die Summe 12 bilden
- Die eigentlich für das Ende der ersten Klasse konzipierten Anforderungen, das Verhältnis von Anzahl und Preis sowie von Größe und Preis für Zuordnungen zu berücksichtigen, wurde zum Erhebungszeitpunkt von 28% bzw. 16% der Schulanfänger richtig gelöst
- Die meisten Kinder konnten mit den Ziffern bis 20 „selbstverständlich“ umgehen.

Insgesamt führten u.a. diese Ergebnisse bzw. deren Interpretationen zur These hoher vorschulischer Kompetenzen, was Forderungen nach einem ganzheitlichen Mathematikunterricht, in dem sofort der Zahlenraum bis 20 behandelt wird sowie nach einer Erhöhung der allgemeinen Leistungsanforderungen in den Eingangsstufen nach sich zog (vgl. Faust-Siehl et al. 1996; Wittmann & Müller 1993).

Im Schuljahr 2001/2002 wurde u.a. in Anlehnung an frühere Testverfahren das Vorwissen von 830 Schulanfängern in unterschiedlichen Bundesländern und sozialen Umfeldern erhoben (vgl. Grassmann 2002). Erfasst wurden folgende Aspekte (Angabe der Lösungshäufigkeit in Prozent):

- Ziffernkenntnis 91%
- Menge zu einer vorgegebenen Anzahl angeben 77%
- Rückwärtszählen 59%
- Anzahl bestimmen und angeben 91%
- Addition 64% mit Zählmöglichkeit; 55% ohne Zählmöglichkeit
- Subtraktion 92% mit Zählmöglichkeit; 42% ohne Zählmöglichkeit
- Halbieren (65%) und Verdoppeln (33%)
- Anzahlen schätzen (31%)

Diese Befunde dienten der Bestätigung der Annahme hoher vorschulischer Kompetenz, zeigten jedoch auch große Unterschiede zwischen Kindern, Klassen und Schulen.

Hauptsächlich wurden aus den unterschiedlichen Untersuchungen zwei zentrale – wenngleich nicht unproblematische weil verallgemeinende – Schlussfolgerungen gezogen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 1995, 107; Schipper 1998, 119):

1. Schulanfänger verfügen über umfangreiche arithmetische Kenntnisse und Fähigkeiten.
2. Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern werden in der Regel unterschätzt.

Diese Forschungsergebnisse dürfen allerdings nicht überinterpretiert werden bzw. bedürfen gewisser Modifikationen, da die postulierte These hoher Kompetenzen nicht allen Schülern gerecht wird (vgl. Schipper 1998, 119f.). Besonders folgende Aspekte der Untersuchungen sollten kritisch hinterfragt werden (vgl. ebd., 127ff.):

- In den Studien werden nur die Prozentsätze richtiger Lösungen berichtet, über die Streuung der Leistung wird dagegen mit einer Ausnahme keine Auskunft gegeben.
- Die befürchtete *Unter*schätzung mathematischer Kompetenzen betrifft nur den Bereich „Straßenmathematik“, formale „Schulmathematik“ wird dagegen *über*schätzt.
- Untersuchungsergebnisse werden nur hinsichtlich möglicher Unterforderung interpretiert. Überforderung wird nicht thematisiert, stellt aber eine reale Gefahr dar.
- Aufgrund ihrer Kontextgebundenheit können die Testaufgaben nur Aufschluss über die Fähigkeit geben, „eine im Kontext vorgegebene Aufgabe mit kontextgebundenen, informellen Verfahren zu lösen“. So wird nur die Kompetenz im Bereich der sogenannten „Straßenmathematik“ berücksichtigt, Bereiche des schulischen Arithmetikunterrichts bleiben unberücksichtigt.

Im Zusammenhang mit der Kontextgebundenheit und der sprachlichen Form der Aufgabe verweist Schipper (1998, 133) auf Untersuchungen von Stern (1994b), in denen Textaufgaben gleicher syntaktischer Struktur aber unterschiedlicher sprachlicher Repräsentation von den Kindern auffällig unterschiedlich gelöst werden konnten: Beispielsweise kann die erfahrungsnah formulierte Vergleichsaufgabe

Hier sind 6 Vögel und 4 Würmer. Jeder Vogel versucht, einen Wurm zu bekommen. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?

von der Mehrzahl der Kinder bereits im Vorschulalter mathematisch korrekt modelliert werden; umformuliert als Situation zum quantitativen Vergleich („Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?“), wird diese Aufgabe sogar für Drittklässler kaum lösbar (vgl. Stern & Staub 2000, 92).

Da das Alltagswissen der Kinder mit dem schulisch vermittelten Wissen nicht vollständig übereinstimmt („natürliches“ numerisches Wissen vs. kulturelles mathematisches Wissen (Stern 1998, 99) bzw. „Straßenmathematik“ vs. „Schulmathematik“ (Schipper 1998)), ist eine Reorganisation des bestehenden Wissens ab Schulbeginn notwendig. Dabei muss das Ziel die „Entwicklung zunehmend allgemeingültiger und leistungsfähiger, damit aber auch durchaus abstrakterer Verfahren“ sein (ebd., 134). Bei Schulbeginn sind also zum einen die individuellen Vorkenntnisse und Lernvoraussetzungen zu berücksichtigen sowie die informellen, ‚natürlichen’ Zugänge und Konzepte der Kinder zu erweitern in weiterführende, arithmetisch tragfähige.

1.6.2 Beeinträchtigter Erwerb mathematischer Kompetenzen

Schwierigkeiten im Mathematikunterricht entstehen, wenn individuelle Lernmöglichkeiten nicht mit den schulischen Anforderungen kompatibel sind. Dies kann auf mangelnde Voraussetzungen beim Kind sowie auf unzureichende Passung zwischen informellem Schülerwissen und formellem Schulstoff zurückzuführen sein. Defizitäres Vorwissen und anforderungsspezifische Schwierigkeiten bedingen sich als Ursache für erschwertes Mathematiklernen dabei häufig wechselseitig (vgl. Scherer 1999c, 171).

Bei Schulbeginn kann die mathematische Entwicklung individuell unterschiedlich vollständig sein: Häufig weisen Kinder mit beeinträchtigter Lernentwicklung Defizite der bereichsspezifischen Voraussetzungen auf (vgl. Krajewski 2003; von Aster 1996). Bei diesen Kindern ist die mathematische Kompetenzentwicklung nicht idealtypisch und nicht vollständig verlaufen. Ihnen fehlt das mathematische Vorwissen, welches ihre Mitschüler vor der Schulzeit informell erwerben, so dass zwischen ihrem Vorwissen und schulischer Anforderung kein Anknüpfungspunkt besteht. Unzureichende Voraussetzungen bewirken daher ungünstigere Startbedingungen bei Schulbeginn. Betroffene Kinder begegnen den schulischen Anforderungen mit begriffslosem Auswendiglernen oder Vermeidungstaktiken. An Stelle von Einsicht in die Bedeutung mathematischer Gesetzmäßigkeiten, Verfahren etc. dominieren Formalismus und Schematismus. So finden sich z.B. immer wieder Kinder, die die Strategie des zählenden Rechnens bis in den Hunderter- oder Tausenderraum so perfektioniert haben, dass die fehlenden Rechenfertigkeiten bis ins zweite oder dritte Schuljahr unentdeckt bleiben. In einer Längsschnittstudie konnte Ostad (1998) sogar belegen, dass rechenschwache Kinder selbst im siebten Schuljahr noch Zählstrategien anwendeten. Befunden der IGLU-E-Studie zufolge weisen am Ende der Grundschulzeit etwa 20% der Kinder gravierende Defizite auf, deren Ursachen noch in der frühen Lernentwicklung wurzeln (vgl. Walther et al. 2003) und die während der Grundschulzeit nicht ausreichend aufgearbeitet werden konnten.

Die verschiedenen Befunde (vgl. Krajewski 2003; von Aster 1996, Walther et al. 2003) verdeutlichen die Notwendigkeit und die Möglichkeit, einen gewissen Anteil der Kinder bereits vor oder bei der Einschulung aufgrund unzureichender bereichsspezifischer Vorerfahrungen als Risikogruppe zu identifizieren. Definition, Symptome und Ätiologie dieses u.a. als ‚Rechenschwäche' bezeichneten beeinträchtigten Fertigkeitserwerbs sind jedoch problematisch und uneinheitlich.

Rechenschwierigkeiten lassen sich z.B. auf der Basis von Kriterien nach der ICD-10 (Dilling et al. 1993) oder nach dem DSM-IV (APA, 1994) klassifizieren. In beiden wird Rechenschwäche als umschriebene Entwicklungsstörung aufgeführt, für deren Diagnose bestimmte Diskrepanz- und Ausschlusskriterien erfüllt sein müssen: Für die Diagnose ‚Rechenstörung' ist eine Differenz zwischen Rechen- und Intelligenzleistung erforderlich. Dazu ist der Einsatz normierter Vefahren notwendig, wobei die Rechenergebnisse unterhalb der durchschnittlichen Altersnorm und der Intelligenzwert >70 sein muss. Die Diskrepanzgröße wird mit 1,5 bis 2 Sigma angegeben. Danach wird also auf eine Rechenschwäche bei arithmetischer Minderleistung trotz durchschnittlicher Intelligenz geschlossen. Zudem muss die Beeinträchtigung von Beginn der Schulzeit an bestehen und darf nicht auf unangemessene Beschulung, fehlende Lerngelegenheiten oder physische Störungen beispielsweise der Sinnesorgane zurückzuführen sein.

Diese Kriterien werden häufig kritisch hinterfragt, da pädagogisch unerwünschte Effekte befürchtet werden: Ein definitorischer Ausschluss weniger intelligenter Schüler könnte zu deren Ausschluss von entsprechender Förderung führen und ist daher aus pädagogischer Sicht fragwürdig. Ebenso ist die geforderte Diskrepanz der Mathematikleistung zu anderen Fächern problematisch, da das Differenzmaß nicht eindeutig zu bestimmen ist (vgl. Lorenz & Radatz 1993, 16; Lorenz 2003b, 145). Auch der Aspekt unangemessener Beschulung als Ausschlusskriterium ist schwierig, da zum einen unklar bleibt, was angemessene bzw. unangemessene Beschulung charakterisiert und da zum anderen ‚unangemessen beschulte' Kinder von Förderung ungerechtfertigterweise ausgeschlossen werden könnten.

Zu enge Definitionen bergen also grundsätzlich die Gefahr, Kinder mit vielschichtiger Symptomatik oder mit nicht in einen gewählten begrifflichen und definitorischen Rahmen passenden Ursachen von therapeutischen Interventionen auszuschließen. Hier ist eine Unterscheidung in Forschungskriterien und in pädagogische Konsequenzen hilfreich: Die Forderung nach einer Diskrepanz zwischen Intelligenz und Mathematikleistung ist für Forschungszwecke wichtig und berechtigt, um das Problemfeld eingrenzen und systematisieren zu können. Auch für die Einleitung und Begründung pädagogischer Maßnahmen sind die Kriterien hilfreich. Wesentlich dabei ist die *Handhabung*: So können der Ausschluss allgemeiner Intelligenzminderung oder unangemessener Beschulung als Ursache sinnvoll sein, da zwischen Kindern unterschieden werden kann, die aufgrund niedriger Intelligenz oder unzureichender Vermittlung Schwierigkeiten haben und denen, die *trotz* ausreichender Rahmenbedingungen wie guten Intelligenzwerten und angemessener Vermittlung Probleme haben. Erhält ein Kind keine angemessene Beschulung, muss *dort* bei der Problembehebung angesetzt werden. Wird die ICD-Klassifikation also zur Systematisierung der betroffenen Kinder eingesetzt, ist dies sinnvoll für die Einleitung adäquater und passender Maßnahmen. Führt deren Anwendung beispielsweise aufgrund zu geringer Diskrepanzmaße jedoch zum Ausschluss bestimmter Kinder, kann diese Handhabung aus pädagogischer Sicht nicht hingenommen werden. Als Grundlage für die pädagogische *Praxis* geeigneter erscheint daher folgendes Oberkriterium: „Ein Kind ist *rechenschwach*, wenn es dauerhafte und umfangreiche Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens hat.“ (Gerster 2003b, 154; Hervorheb. i. Orig.).

Lernschwache Kinder lernen „nicht *prinzipiell* anders“, aber ihre „Lernprozesse finden im Vergleich zu normalbegabten Kindern in zeitlicher Ausdehnung, reduziertem Umfang und mit größerer Fehleranfälligkeit statt.“ (Scherer 1998, 101ff.; Hervorheb. i. Orig.). Auf beschreibender Ebene aufgeführt werden u.a. Auffälligkeiten in fertigkeitsspezifischen Bereichen wie z.B. verfestigtes zählendes Rechnen. Auch Auffälligkeiten in basaleren Bereichen wie u.a. visueller, taktil-kinästhetischer oder auditiver Wahrnehmung sowie metakognitiven Aspekten werden häufig genannt. Unterschiedliche theoretische Annahmen führen dabei zu verschiedenen Auffassungen über Rechenschwierigkeiten und deren Ursachen. Diese Situation erfordert eine grundsätzliche Zurückhaltung „in der Zuschreibung der Leistungsdefizite zu Fähigkeits- beziehungsweise Anlagedefiziten“, in der etikettierenden Verwendung von Begriffen wie ‚Dyskalkulie' etc. sowie in der Verwendung sichtbarer Symptome als Ursachen (Bauersfeld 2003b, 447). Bedingungen und Wechselwirkungen von Faktoren, die an Lernschwierigkeiten beteiligt sind, sind vielfältig und komplex, isolierte Rechenschwächen beispielsweise einzig aufgrund neurologischer Behinderungen sind unwahrscheinlich (vgl. Fritz & Ricken 2001b, 20).

Definition, Symptomatik und Ätiologie von Rechenschwierigkeiten sind daher nicht präzise und eindeutig festzulegen und werden hier nicht explizit diskutiert (eine Übersicht über Modelle und Perspektiven verschiedener Disziplinen findet man bei Fritz et al. (2003a), Fritz et al. (2005) und Lorenz (2003b) – wichtiger erscheint ein Herausschälen eines ‚pädagogisch tragfähigen Verständnisses' (vgl. Kornmann 2003, 248) von mathematischen Schwierigkeiten.

Unabhängig von intellektuellen Voraussetzungen können Rechenschwierigkeiten durch verzögerten oder beeinträchtigten fertigkeitsspezifischen Erwerb hervorgerufen werden (vgl. Fritz & Ricken 1998, 104; Lorenz 1992). Kenntnis über die zentralen Entwicklungsaspekte kann daher konkrete Hinweise zu adaptiver Förderung bieten. Rechenschwäche wird dabei nicht mehr „primär als Symptom mit Krankheitswert" konzeptualisiert (Lorenz 2003b, 157), sondern wird im komplexen Bedingungsgefüge von individuellen Entwicklungsfaktoren und schulischen sowie anderen Umweltgegebenheiten gesehen. So können Schwierigkeiten im Mathematikunterricht u.U. auch auf den Erwerb ungeeigneter Strategien oder auf didaktogene Ursachen zurückzuführen sein. Um dies zu vermeiden, sind umfangreiche Kenntnisse der Lehrperson über inhaltliche Anforderung und über ‚Stolpersteine' wichtig: Aufgrund problematischer Definitionsversuche und unklarer Ursachen erscheint unter Gesichtspunkten effektiver Förderung eine Konzentration auf wesentliche bereichsspezifische Entwicklungsaspekte, inhaltliche Stolpersteine und auf die Art der Lösungsprozesse eines Kindes sinnvoll. In Beziehung gesetzt zum oben dargestellten Entwicklungsmodell (vgl. 1.4.3.2) bieten so empirisch fundierte Aufstellungen häufiger Symptomgruppen bei Rechenschwierigkeiten pädagogisch verwertbare Hinweise zur Erklärung wesentlicher Schwierigkeiten. Ein grobes Raster zentraler inhaltlicher Problemfelder stellen Gerster (2003b) und Schipper (2001) vor:

Nach Schipper (2001, 16f.) lassen sich die Schwierigkeiten beim Mathematiklernen nach folgenden vier Symptomgruppen systematisieren (nach Häufigkeit geordnet):

1. <u>Verfestigtes zählendes Rechnen</u>: Die meisten rechenschwachen Kinder verfügen nicht über nicht-zählende Rechenstrategien oder nutzen diese nicht, da sie auf ihre ‚bewährte' Zählstrategie vertrauen. Dieses ‚sequenzielle' Vorgehen beim zählenden Rechnen kann das Erkennen und Nutzen der Strukturen von Zahlen und Veranschaulichungen sowie die Entwicklung von Stellenwertverständnis verhindern.
2. <u>Schwierigkeiten bei der Rechts-Links-Unterscheidung</u>
3. <u>Einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen</u>: Viele Kinder fassen Mathematik als bloßes „Regelspiel" auf.
4. <u>Intermodalitätsprobleme</u>: Vielen Kindern ist es nicht möglich, zwischen den verschiedenen Wissensmodi zu wechseln und diese aufeinander zu beziehen.

Bezüglich der zweiten Symptomgruppe ‚Schwierigkeiten bei der Rechts-Links-Unterscheidung' ist anzumerken, dass Probleme in der räumlichen Orientierung zu den mathematikunspezifischen Einflussfaktoren zu zählen sind (vgl. Fritz & Ricken 2005, 7; Ricken & Fritz 2005, 222). Für eine präzise Erfassung bereichsspezifischer Kompetenzen ist die Untersuchung *spezifischer* Fertigkeiten wesentlich wichtiger (vgl. 2.3).

Gerster (2003b, 154ff.) beschränkt sich bei der Auflistung zentraler inhaltlicher Hürden beim Mathematiklernen auf einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen und auf ein zu „geringes Repertoire an auswendig gewussten Zahlensätzen": Einseitige Zahlvorstellungen führen beispielsweise dazu, dass Zahlen als Positionen innerhalb einer Zahlwortsequenz verstanden werden, nicht aber auch als Zusammensetzung aus anderen Zahlen. Häufig verfügen Kinder also bereits über ein ordinales Zahlverständnis und können Vorgänger und Nachfolger über deren Position beim Durchlaufen der Zahlreihe bestimmen. Auch verfügen sie häufig über ein erstes, allerdings unvollständiges Kardinalverständnis: Wie in 1.4.3 erläutert, beinhaltet die Anwendung des Kardinalprinzips beim Zählen von Objekten bereits erstes kardinales Verständnis. Die Zahleigenschaft der Zerlegbarkeit wird erst später einsichtig. Kindern mit Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Kompetenzen fehlt dieses numerische Teile-Ganzes-Konzept meist vollständig. Gerster betont daher die Bedeutung eines Zugangs zu

> „*Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen* […] über Vorstellungen, in denen Zahlen nach dem *Teile-Ganzes-Konzept* als gegliederte Quantitäten aufgefasst werden" (Gerster 2003b, 154; Hervorheb. i. Orig.).

Werden Zahlen nur als Positionen interpretiert, ist die Verbindung von Zähl- und Mengenwissen also noch unzureichend.

Sind nur einseitige Vorstellungen von Rechenoperationen verfügbar, werden Additionen häufig lediglich als Weiterzählen, Subtraktionen als Rückwärtszählen, Dividieren als Vor- und Rückwärtszählen in auswendig gelernten Einmaleinsreihen verstanden und genutzt. Auch hier fehlen Einsichten in numerische Teile-Ganzes-Beziehungen. Probleme treten bei zählenden Rechenstrategien in Einerschritten bereits innerhalb des Zehnerraumes auf: In Abhängigkeit von der Aufgabe können die erforderlichen Zählprozesse bereits so komplex sein, dass

> „sich die Aufmerksamkeit des Kindes ganz auf die Zählprozedur richten muss und es den Zusammenhang zwischen der Aufgabe und dem Ergebnis nicht mehr reflektieren oder begründen und damit im Langzeitgedächtnis fixieren kann." (ebd., 155).

Zählendes Rechnen ist zudem nicht weiterführend, da es in großen Zahlenräumen umständlich und fehleranfälliger wird, es liefert nur Einzelfakten und bettet Aufgaben nicht in ein Beziehungsgeflecht ein. Zählende Rechner nutzen keine Beziehungen zwischen

Aufgaben, sondern rechnen verwandte bzw. von bereits berechneten Aufgaben ableitbare Aufgaben jeweils neu. Die vermeintlich sicheren, häufig perfektionierten Zählstrategien lassen dem Kind die Notwendigkeit einer Automatisierung von Grundaufgaben häufig nicht sinnvoll erscheinen. Insbesondere langsam lernende Kinder geben häufig ihre Merkversuche auf und vertrauen auf ihre Zählprozeduren. Nach Gerster (2003b) wurzeln die Schwierigkeiten aus inhaltlicher Perspektive also in einseitigen Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen, was wiederum Automatisierungsprozesse bereits des elementaren Rechnens behindert.

Schwierigkeiten entstehen also haupsächlich dadurch, dass Zahlworten und mathematischen Symbolen keine oder keine ausreichend umfassende Bedeutung beigemessen wird. Die Raster von Schipper (2001) und Gerster (2003b) beschreiben mögliche Problemfelder dabei nur sehr allgemein. U.a. die in Kapitel 2 diskutierten Diagnoseverfahren sowie die in Kapitel 3 vorgestellten eigenen Lernstandserfassungen erlauben dagegen eine differenziertere Erfassung relevanter Nadelöhre mathematischer Entwicklung, von denen ausgehend dann Förderziele präziser ableitbar werden.

1.7 Zusammenführung und Diskussion

In diesem Kapitel wurde ausführlich die frühe, dabei jedoch bereits hochkomplexe Entwicklung mathematischer Kompetenzen dargestellt, angefangen bei angeborenem, domänenspezifischem Kernwissen sequenzieller und analoger Art bis zur Integration von Mengen- mit Zahl- und Zählkonzepten, der Begriffsbildung und Verinnerlichung mathematischer Operationen sowie der Konstruktion mentaler Zahlenraumvorstellungen. Wesentliche Charakteristika von Wissenskonstruktion und -veränderung können folgendermaßen zusammengefasst werden:

Wissen wird durch eigenaktive **Konstruktionsprozesse**, nicht durch äußere Wissenspräsentation aufgebaut (vgl. Resnick 1989, 162). Reine Vermittlung mathematischer Inhalte von außen reicht nicht aus, das Kind muss vielmehr die Inhalte verstehen. Dazu ist eine individuelle, nur vom Lernenden selbst zu leistende aktive Wissenskonstruktion und -einordnung in bestehendes Wissen notwendig.

Begriffsbildung vollzieht sich nicht ausschließlich als globaler Wandel von konkreten zu abstrakten Begriffen oder von Perzepten zu Konzepten. Vielmehr scheint **begriffliches Kernwissen** über kausale, funktionale und strukturelle Objekteigenschaften angeboren zu sein oder zumindest im Verlauf des ersten Lebensjahres erworben zu werden (vgl. Sodian 2002, 445ff.). Bereits Säuglinge sind also mit Prinzipien ausgestattet, die „den Wissenerwerb in bestimmten Domänen unterstützen“ (Schnotz 2001, 75). Das gesamte Wissen eines Menschen scheint in **spezifische Domänen** unterteilt zu sein, die in sich geschlossene Wissenssysteme darstellen. Zum einen laufen im Rahmen dieser Domänen Verstehens- und Problemlöseprozesse ab, zum anderen wird durch diese Prozesse neu erworbenes Wissen domänenspezifisch abgespeichert. Damit ist Wissensaneignung im Wesentlichen domänenspezifisch. Wesentlicher leistungsbestimmender Faktor ist daher nicht allein und auch nicht überwiegend allgemeine Intelligenz, sondern eher das relevante domänenspezifische Wissen – dies gilt besonders mit zunehmendem Alter. Überdurchschnittliche Intelligenz ist damit „weder eine notwendige noch eine hinreichende Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer neuen mathematischen Aufgabe“, vielmehr bestimmt eine umfangreiche und erfolgreiche Lernbiographie den Lernerfolg (Stern 1998, 108).

Obwohl mathematische Kompetenz als eigenständige Domäne betrachtet wird, bedeutet dies nicht, dass logische Denkoperationen auf diese Domäne beschränkt bleiben müssen: Carey & Spelke (1994) haben gezeigt, dass zwischen Domänen Verbindungspfade angelegt werden und numerische Konzepte beispielsweise zur Auseinandersetzung mit physikalischen Anforderungen genutzt werden können („mappings across domains“). Besonders für frühe Kompetenzen werden gewisse Zusammenhänge zwischen numerischem und physikalischem Wissen vermutet (vgl. Simon et al. 1995, 268). Darüber hinaus entwickeln sich bereichsübergreifende Schlüsselkompetenzen, die sich auf Aneignung und Anwendung von Wissen in unterschiedlichen Domänen auswirken können (vgl. Stern 2002, 36f.): So liegen Grundlagen der Fähigkeit zur Perspektivenübernahme als modularisiertes Wissen vor und stellen die Voraussetzung für metakognitives Wissen dar.

Der Verlauf der kognitiven Entwicklung ist durch **Re- und Umorganisation** bereichsspezifischen Begriffswissens gekennzeichnet. In Piagets Theorie ist kognitive Entwicklung durch ein grundsätzliches Äquilibrationsbestreben gekennzeichnet: Die Einordnung neuer Erfahrungen in bestehende Wissensstrukturen wird durch Assimilationsprozesse gesteuert, Re- und Umorganisation von inadäquat gewordenem Wissen dagegen durch Akkomodationsprozesse. Das betrifft nicht nur die Restrukturierung von Konzepten, sondern kann sich auf ganze Wissensstrukturen beziehen (vgl. Schnotz 2001, 75). Nach Piaget wirkt sich eine solche Reorganisation von Wissen bereichsübergreifend aus. Neuere entwicklungspsychologische Ansätze gehen jedoch aufgrund nachgewiesener umfangreicher kognitiver Leistungen bereits kleiner Kinder

> „von domänenspezifischen Umstrukturierungsprozessen aus, die auf eine Zunahme des betreffenden Domänen-Wissens und nicht auf eine Zunahme allgemeiner logischer Fähigkeiten […] zurückzuführen sind“ (ebd., 76):

Veränderung und Erweiterung von Begriffswissen („conceptual change“) findet nach Carey & Spelke (1994, 179) statt durch Veränderung bestehender und durch Entwicklung neuer domänenspezifischer Kernprinzipien. Beispielsweise ist eine Reorganisation von bestehendem Wissen in großem Umfang ab Schulbeginn notwendig, wenn nämlich das Alltagswissen der Kinder mit dem schulisch vermittelten Wissen nicht kompatibel ist. Um komplexes mathematisches Wissen zu erwerben, sind solche Erweiterungen und Restrukturierungen bestehenden Wissens notwendig. Denn Lernen von Mathematik verläuft nicht monoton ansteigend. Alte Strategien werden nicht einfach durch neue, effektivere ersetzt, sondern alte und neue Strategien bestehen zumindest eine Zeit lang nebeneinander. Kognitive Entwicklung zeigt sich also in **allmählichem Strategiewechsel**, was u.a. erklärt, dass neu erworbenes Wissen selbst von guten Schülern über einen gewissen Zeitraum nur unsicher beherrscht wird (vgl. Stern 2002, 35).

Mathematische Erwerbsprozesse werden zudem durch **bereichsspezifische Beschränkungen** gesteuert ebenso wie durch **sozio-kulturelle Reglementierung** (vgl. Bruner et al. 1971): Konstruktion und sukzessive Revision von Wissen unterliegen gewissen Begrenzungen, so dass grundlegende erworbene Wissensstrukturen häufig interindividuell ähnlich oder sogar gleich sind. Konstruktionsprozesse werden sowohl intern als auch extern beschränkt: Angeborene bereichsspezifische Veranlagungen ebenso wie bereits erworbene Wissensstrukturen steuern den Wissenserwerb innerlich. Bezogen auf die universell vorbereitete, sehr frühe Entwicklung mathematischer Kompetenzen wirken zum einen zu beachtende Zählprinzipien (vgl. Gelman & Gallistel 1978) und zum anderen entwicklungsleitende kognitive Schemata (vorzahliges Mengen- und Reihenwissen) begrenzend bzw. steuernd. Sozio-kulturelle Bedingungen und Normen wie Artefakte einschließlich der Sprache und geltender Notationssysteme sowie andere Personen wirken äußerlich regulierend. In Abhängigkeit davon können die auf den angeborenen und in allen Kulturen gleich ablaufenden Kompetenzen aufbauenden, vermittelten Aspekte unterschiedlich überformt und uneinheitlich sein.

Wissenserwerb und -anwendung sind **situativ und kontextgebunden**: Sie erfolgen grundsätzlich im Kontext von Handlungszusammenhängen und sind intentional (vgl. Greeno 1991). Erworbenes Wissen spiegelt wider, wie es erworben und wie es angewandt wurde. Damit sind die mentalen Repräsentationen von Prozeduren und Konzepten individuell gefärbt und nicht etwa interindividuell universell. Um erworbenes

Wissen auf andere Anforderungen als die am Erwerbsprozess beteiligten anwenden, es also transferieren zu können, muss vom Kontext abgesehen werden können. Experten offensichtlich erscheinende Analogien zwischen Anforderungen können häufig dann von Novizen nicht erkannt werden, wenn die neue Anforderung in einen anderen situativen Kontext eingebettet ist und die „gemeinsame Tiefenstruktur" noch nicht durchschaut wird (Steiner 2001, 197). Eine Dekontextualisierung erscheint daher für den Transfer von Wissen auf neue Situationen bzw. neue Inhalte notwendig (vgl. ebd., 198). Ebenso kann jedoch auch eine angemessene *Kontextualisierung* der Wissensstrukturen den Aufbau trägen Wissens verhindern helfen (vgl. Schnotz 2001, 79). Um Wissen effektiv anwenden zu können, muss man wissen, welche Konzepte in welchen Kontexten sinnvoll verwendet werden können. Damit ist „nicht das Wissen selbst, sondern die Situiertheit des Wissens" zu verändern (Schnotz 2001, 79). Insgesamt wird einsichtiger und effektiver Wissenserwerb immer **gedankliche Reflexion** erfordern, um einen strukturellen Kern herauslösen zu können.

In diesem Kapitel wurde also u.a. herausgestellt, dass mathematisches Begriffswissen domänenspezifisch ist, dass es neben physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Prinzipien durch angeborene oder sehr früh erworbene mathematikspezifische Kernprinzipien der 1-zu-1-Zuordnung und der Reihung organisiert wird und dass es kontextabhängig ist (vgl. Carey & Spelke 1994; Sodian 2002; Stern 2002). Durch Sprache sowie kulturelle Werkzeuge und Symbolsysteme wird das angeborene Kernwissen erweitert und flexibilisiert (vgl. Dehaene 2001). Geht man davon aus, dass Anzahlerfassung, Zählen und Mengenoperationen auf den Kernprinzipien aufbauen, ist es sinnvoll, daran anzuknüpfen. So können über 1-zu-1-Zuordnungen Mengenvergleiche entwickelt und über Erfahrungen mit Reihenfolgen bzw. Seriation der Erwerb von Zahlwortreihe und Zählfertigkeit vorbereitet werden. Für den Aufbau eines umfassenden und formalen Zahlbegriffs sind grundsätzlich sowohl sequenzielle, individuierende als auch analoge, ganzheitliche Wahrnehmungen und Repräsentationen von Zahlen und Mengen notwendige Basis. Damit erhalten im Wesentlichen die Zahlaspekte ‚Ordinalaspekt' und ‚Kardinalaspekt' zentrale Bedeutung für den Aufbau eines abstrakten Zahlbegriffes. Wie ausführlich anhand der integrierten Darstellung u.a. des Modells von Fuson zu Erwerb und Elaboration der Zahlwortreihe (vgl. Fuson et al. 1982; Fuson & Hall 1983; Fuson 1988, 1992a, 1992b) und der Annahmen von Resnick (1983, 1989; Resnick et al. 1991) gezeigt worden ist, erfordert ein umfassender Zahlbegriff eine Vielzahl differenzierter Zähl- und Abzählfertigkeiten: Nach Kontext und Komplexität unterschiedliche Entwicklungsaspekte sind das Zählen als Sequenz, das Zählen von Objekten und Einsicht in die kardinale Bedeutung des Zählens. Diese führen erst in ihrer Integration zu einem elaborierten Zahl- und Zählverständnis. Der Entwicklungsprozess beginnt dabei bei einem bedeutungslosen Rezitieren einer Zahlwortsequenz, bevor im weiteren Verlauf die Zahlwortreihe auf Objekte anwendbar wird und sich kardinales Verständnis entwickelt. Die Flexibilität der Anwendung der Zahlwortreihe auf Objekte ist für einen elaborierten Zahlbegriff entscheidend: Erst die Fähigkeit zu beliebigem Weiterzählen, zu zweiseitiger Durchlaufbarkeit der Zahlwortreihe, zur Zählbarkeit der Zahlwortreihe selbst (~ Weiterzählen *um* eine bestimmte Anzahl), ein Verständnis von Zahlbeziehungen sowohl in ordinalen, kardinalen und relationalen Bedeutungen sowie die Einsicht in Zahlen als gegliederte Quantitäten erlauben ein echtes Verständnis vom Konstruktionsprinzip der Zahlwortreihe und der einzelnen Zahl sowie von Rechenoperationen und deren Beziehungen untereinander (z.B. Einsicht in die Komplementarität von Addition und Subtraktion durch die Verfügbarkeit einer reversiblen Zahlwortreihe).

Davon lässt sich die Bedeutung von vielfältigen Zähl- und Abzählübungen sowie Mengen- und Zahlzerlegungen für den Aufbau des Zahlbegriffs ableiten. Dazu gehört das gezielte Verbinden der Zahlwortsequenz mit protoquantitativen Schemata durch Integration von Zuständen und Operationen wie dem Vergleichen, Vermindern und Vermehren sowie den Beziehungen zwischen Teilen und einem Ganzen mit der Zahlwortreihe und dem Verfahren des Zählens. Solche quantitativen Zahlvorstellungen sind wiederum Voraussetzung für den Aufbau abstrakter Zahlvorstellungen, die unabhängig von konkretem Vorhandensein einer Menge oder ihrer Darstellung existieren können und Bedeutung haben.

Die dargestellten früheren Vorstellungen der kognitiven Entwicklung als gestufter Abfolge vom Konkreten, Handelnden zum Abstrakten hatten entsprechende Konsequenzen für die Gestaltung des Unterrichts. So wurden beispielsweise mathematische Inhalte im Unterricht der Grundschule über diese didaktische Folge von konkreter Handlung über zeichnerische oder bildliche Darstellung zu abstrakter Repräsentation behandelt. Da Kinder jedoch viel früher als angenommen auch auf abstrakter Ebene lernen, ist davon auszugehen, dass die unterschiedlichen Repräsentationsmodi bereits sehr früh nebeneinander existieren und situations- und kontextspezifisch unterschiedlich sinnvoll sind. So ist beispielsweise zu hinterfragen, ob jeder Inhalt sinnvoll handelnd eingeführt werden kann. Auch ist zu fragen, ob die Erarbeitungsrichtung nur unidirektional von konkreter Handlung zu formaler Rechnung verlaufen darf oder ob auch die umgekehrte Richtung hilfreich sein kann (z.B. die in einer Rechenaufgabe dargestellte

Situation mit Material modellieren oder zeichnerisch darstellen). Ebenso müssen aus den referierten Befunden der Expertise-Forschung entsprechende didaktisch-methodische Konsequenzen für den Unterricht gezogen werden. Besonderer Wert ist danach nicht auf eine Verinnerlichung von Inhalten durch die didaktische Stufenfolge konkret – bildlich – abstrakt zu legen, sondern die *Vernetzung* neuen Wissens mit bestehenden Wissensstrukturen zu betonen. Da mathematisches Wissen in Abhängigkeit von Kontext und individuellen Bedingungen unterschiedlich aufgebaut wird, sind neben inhaltlichen – dazu gehören z.B. auch Instruktion und Veranschaulichung – auch personenbezogene, soziale und biographische Einflussfaktoren des einzelnen Kindes bei der Vermittlung zu berücksichtigen. Zu letzteren gehören z.B. wie in 1.6 dargestellt bereichsspezifische Vorkenntnisse und Erfahrungen. Diese müssen ausreichend entwickelt sein. Bei unzureichender bereichsspezifischer Lernbiographie müssen z.B. entsprechende Angebote von der Schule bereitgestellt werden. Obwohl Förderung bei beeinträchtigtem Fertigkeitserwerb prinzipiell bereichsspezifisch zu gestalten ist, kann eine Anreicherung mit allgemeineren Aspekten wie der Förderung metakognitiver und motivationaler Faktoren sinnvoll sein (vgl. auch Hasselhorn & Hager 2001, 344 f.; Fritz & Ricken 2001a, 50 ff.). Mathematische Kompetenzentwicklung wird darüber hinaus in systemischem Sinne beeinflusst durch sozio-ökonomische und didaktische Faktoren. Aufgrund eigenaktiver Konstruktionsprozesse des Wissenserwerbs und individueller Vorerfahrungen und Interpretationen muss Vermittlung allgemein und Förderung im Besonderen individuell adaptiv erfolgen.

In diesem Kapitel wurden zentrale, bereichsspezifische Entwicklungsaspekte und notwendige Bedingungen sowie Art und Struktur von Denk- und Lernprozessen ausführlich dargestellt, um eine geeignete theoretische Basis für konkrete inhaltliche, didaktische und methodische Folgerungen für Diagnostik und Unterstützung beim Erwerb mathematischer Kompetenzen zu bilden. Das darauf basierende Verständnis mathematischer Kompetenz als komplexem Konstrukt umfasst bereichsspezifische Fertigkeiten sowie verschiedene kognitive (Intelligenz, Gedächtnis, Wahrnehmung, Sprache) und nicht-kognitive Komponenten (Motivation, Emotion, Selbstwahrnehmung und -konzept) und ist Grundlage für die Entwicklung des Diagnose- und Förderkonzeptes ‚Kalkulie' (Gerlach et al. 2007). Bevor dieses Konzept in Kapitel 3 vorgestellt wird, wird im nächsten Kapitel im Rahmen der Diskussion mathematikspezifischer Diagnoseverfahren weiter ausgeführt, welche Einflussfaktoren zu den leistungsspezifischen und welche zu den unspezifischen gehören.

2. Diagnostik mathematischer Leistungen und Kompetenz

2.1 Einleitung

Es gibt immer einige Kinder, die im Grundschulunterricht durch besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen auffallen. Befunden der IGLU-E-Studie zufolge weist etwa ein Fünftel der Viertklässler bedenkliche Defizite in Mathematik auf, deren Ursachen meist noch in der frühen Lernentwicklung wurzeln (vgl. Walther et al., 2003). Das bedeutet, dass bereits zu Beginn der Grundschulzeit bestehende Leistungsunterschiede über die Grundschulzeit hinweg relativ stabil bleiben (vgl. Befunde der SCHOLASTIK-Studie; Helmke 1997b). Diese können jedoch durch personale Bedingungen (Lehrer, Klasse) und gezielte bereichsspezifische Fördermaßnahmen beeinflusst werden (vgl. Weinert & Helmke 1997).

Ein zentrales Ergebnis dieser Studie ist, dass Grundschulunterricht besonders auf spezifische kognitive Leistungen Einfluss hat: Je spezifischer die Leistung und je weniger außerschulische Lerngelegenheiten ein Kind hatte, desto größere Beeinflussungsmöglichkeiten hat der Grundschullehrer (vgl. ebd., 461). Auch Ergebnisse der Individualstudie LOGIK sprechen für die besondere Bedeutung bereichsspezifischen Vorwissens und ausreichender Lernerfahrungen, da mathematische Leistungen stärker durch mathematikrelevante Komponenten und individuelle Lernbiographien als durch Intelligenztestwerte erklärbar sind (vgl. Stern 1998). Im Vorschulalter gemessene Intelligenzwerte klären nur 24% der späteren Mathematikleistung auf (vgl. Krajewski 2003). Die Dominanz des Vorwissens bleibt während der Schulzeit bestehen, wobei der Einfluss bereichsspezifischen Wissens auf die Leistung im Verlauf der Schulzeit noch zu-, der der Intelligenz dagegen abnimmt.

Vor dem Hintergrund dieser Befunde erscheinen eine möglichst frühzeitige Diagnose und individuell zugeschnittene bereichsspezifische Interventionsmaßnahmen sinnvoll. Um möglichst effektiv und passgenau Fördermaßnahmen durchzuführen, ist eine geeignete Diagnostik notwendig. Die aktuelle Betonung der Bedeutung von domänenspezifischem Vorwissen für das Lernen hat dabei auch Auswirkungen auf diagnostische Grundannahmen und Ziele (vgl. Renkl 1996, 176): Entwicklung und Einsatz von Intelligenztests hatten die Untersuchung allgemeiner, domänenübergreifender Fähigkeiten als Unterschiedsmaß für interindividuelle Leistungsunterschiede intendiert. Heute gilt dagegen domänenspezifisches Vorwissen als wesentliche Kontrollvariable. Neben der

Diskussion, welche Komponenten zum Mathematiklernen gehören und insbesondere, wie diese einzelnen Aspekte zusammenhängen, wird in diesem Kapitel zu untersuchen sein, welche Verfahren vorschulische und schulische mathematische Inhalte erfassen und welche Aspekte dabei wie differenziert beachtet werden. Auf der Grundlage der in 1 dargestellten theoretischen Annahmen und Modelle wurden für das Konzept Kalkulie (vgl. 3) Lernstandserhebungen konzipiert. Da diese auf die Förderbausteine von Kalkulie bezogen sind, erfolgt deren Vorstellung im Rahmen der Darstellung des gesamten Kalkulie-Konzeptes erst in Kapitel 3. An dieser Stelle werden zur besseren Einordnung der Kalkulie-Lernstandserfassungen ausgewählte mathematikspezifische diagnostische Verfahren vorgestellt und diskutiert. Zuvor werden zur besseren Einschätzbarkeit der Testinhalte mathematikunspezifische Leistungsfaktoren von spezifischen abgegrenzt. In der abschließenden Diskussion wird der Fokus auf die Frage gelegt, welche diagnostischen Aussagen aus einem Test gewonnen werden können und insbesondere, inwieweit Zusammenhänge zwischen mathematikspezifischen Teilleistungen erkennbar werden.

2.2 Leistungsspezifische und -unspezifische Einflussfaktoren auf mathematische Leistung

Für eine präzise Erfassung bereichsspezifischer Leistungen ist es grundsätzlich notwendig zu klären, welche Einflussfaktoren zu den leistungsspezifischen und welche zu den unspezifischen gehören. Im Gegensatz zum mathematischen Bereich sind relevante bereichsspezifische Vorläuferfähigkeiten für den Bereich des Schriftspracherwerbs bereits gut untersucht: So stellen phonologische Bewusstheit und phonologisches Gedächtnis unumstritten zentrale spezifische Voraussetzungen dar und man geht von einer strengen Kausalität der Beziehungen von phonologischer Bewusstheit, phonologischem Gedächtnis und Lese-Rechtschreibschwächen aus (vgl. Scheerer-Neumann 2001, 438). Für den Bereich der Schriftsprache existieren bereits Modelle, die einzelne zentrale Komponenten des Lernprozesses zu identifizieren, diese zu erfassen und gezielt zu fördern erlauben. Dass eine solche Förderung bereichsspezifischer Vorläuferfähigkeiten sinnvoll ist, belegen eine Vielzahl an Untersuchungen von Schneider und Mitarbeitern (vgl. Roth & Schneider 2002).

Mit der Verfügbarkeit über derartige theoretisch fundierte bereichsspezifische Diagnoseverfahren können eine frühzeitigere Erfassung und angemessene bereichsspezifische Förderung von Risikokindern möglich werden: So können fehlende Erfahrungen und Voraussetzungen bereits vor Schulbeginn oder während der Eingangsphase nachgeholt und damit die Ausgangsbedingungen gerechter verteilt werden.

Für den mathematischen Bereich gibt es noch keine solche breite Forschungsbasis. Fritz & Ricken (2005, 7f.; Ricken & Fritz 2005, 222f.) fassen den derzeitigen Forschungsstand zu unspezifischen Einflussfaktoren von Mathematikleistungen zusammen: Danach zählen zu den unspezifischen Bedingungen von mathematischen Lernschwierigkeiten Beeinträchtigungen in folgenden Bereichen:

- Wahrnehmungsverarbeitung
- räumliche Orientierung
- Entwicklung des Körperschemas
- visuo-motorische und taktil-kinästhetische Bereiche
- Figur-Hintergrund-Differenzierung
- Farbkenntnis
- Rhythmusgefühl
- sprachliche Kodierung
- Reihenfolgeanalyse
- Sprachverständnis
- abstraktes Denken
- Gedächtniskapazität
- Informationsverarbeitungsgeschwindigkeit
- Intelligenz

Obwohl häufig von Zusammenhängen zwischen visuellen Faktoren (insbesondere visuell-räumlichen Aspekten) und arithmetischen Kompetenzen ausgegangen wird (vgl. Lorenz 2005, Kaufmann 2003), sprechen einige Befunde gegen die Spezifität dieser Faktorengruppe für mathematische Leistungen: So konnten in Krajewskis (2003) Langzeitstudie zwar Zusammenhänge zwischen räumlichem Vorstellungsvermögen und den Mathematikleistungen nachgewiesen werden. Diese waren jedoch wesentlich geringer ausgeprägt als die Zusammenhänge zwischen den Vorläuferfähigkeiten ‚Mengen- und Zahlenvorwissen' und den Mathematikleistungen, so dass die räumliche Vorstellungsfähigkeit für den Erwerb mathematischer Kompetenzen kaum Erklärungswert besitzt (vgl. Krajewski 2005, 63).

Interessant in diesem Zusammenhag ist ein Hinweis von Resnick (1989, 163): Die sich vorschulisch entwickelnden protoquantitativen Teile-Ganzes-Schemata (vgl. 1.4.1) befähigen zu logisch begründeten Urteilen über Beziehungen von Teilen zu einem Ganzen – visuelle Kontrolle führt dabei jedoch eher zu Fehlurteilen als zur Stützung der Wahrnehmung. Dies ist als weiterer Hinweis darauf zu werten, dass intuitive protoquantitative Einsichten leicht durch Wahrnehmungseindrücke verfälscht werden können. Solche Fehlleistungen – beispielsweise in den klassischen Piaget-Versuchen – belegen also nicht das Fehlen elementarer Fähigkeiten. Zudem hat die räumlich-visuelle Wahrnehmungsfähigkeit ähnlich wie beispielsweise Intelligenz, Gedächtniskapazität und Zahlenverarbeitungsgeschwindigkeit Bedeutung auch für andere Entwicklungsbereiche wie z.B. die Schriftsprachentwicklung (vgl. Fritz & Ricken 2005, 8; Krajewski 2005, 63). Solche Faktoren haben in ihrer Funktion allgemein kognitiver Fähigkeiten Einfluss auf verschiedene Leistungsbereiche, sie sind jedoch als unspezifische Faktoren einzustufen.

Wie in 1.4.1 dargestellt, können grundsätzlich zwei große mathematikspezifische Entwicklungsstränge angenommen werden – Entwicklung von Mengenkonzepten und von Reihen- und Zählfertigkeiten – die im Entwicklungsverlauf zu einem umfassenden Zahlbegriffsverständnis integriert werden müssen. Diese spezifischen Komponenten ‚Zahlen- und Zählwissen' und ‚Mengenwissen' beeinflussen die Mathematikleistung erwiesenermaßen stärker als unspezifische (vgl. auch 2.3.1). Obwohl noch ungeklärt ist, welche Teilfertigkeiten genau für die Vorhersage mathematischer Leistungen relevant sind, spricht Vieles für die Notwendigkeit einer differenzierteren Betrachtung von Zahlen- und Mengen(vor)wissen. In diesem Kapitel werden einige diagnostische Ansätze daraufhin untersucht, ob und welche spezifischen Prädiktoren bzw. Fertigkeiten erfasst werden. In 3.3.1 wird im Rahmen der Darstellung der eigenen Lernstandserfassungen die Diskussion um mathematikspezifische Prädiktoren und Bedingungen vertieft.

2.2 Mathematikspezifische diagnostische Verfahren

Zur Diagnostik mathematikspezifischer Leistungen werden vorwiegend curriculumsorientierte, quantitative Leistungstests eingesetzt, zum Teil aber auch entwicklungsorientierte Tests wie beispielsweise OTZ, ZAREKI oder HRT (vgl. 2.3.2 bis 2.3.4): Mit ersteren wird auf eine Rechenstörung geschlossen, sobald die gemessene Mathematikleistung sehr schwach ist. Häufig wird dies in Prozentrangwerte (PR) umgerechnet. PR≤15 können dabei als Grenzwert gelten, da dies bedeutet, dass 85% der Kinder der Normierungsstichprobe ein besseres Ergebnis erzielt haben.

Da bereichsspezifisches Vorwissen als wesentlicher Prädiktor späterer Schulleistung gilt (vgl. Gruber 1999; Helmke 1992; Krajewski 2003; Renkl 1996; Stern 1998), werden in jüngster Zeit zunehmend Testverfahren zur Erfassung bereits pränumerischer Lernvoraussetzungen entwickelt (u.a. OTZ, ZAREKI-K; vgl. 2.3.1 bis 2.3.3). Aufgrund der Tatsache, dass Rechenschwächen meist von Beginn des Fertigkeitserwerbs an bestehen, erscheint eine Klärung der verfügbaren spezifischen Grundlagen wesentlich.

Bei der Einordnung der nachfolgend vorgestellten Verfahren ist stets die zu Grunde gelegte Theorie des Aneignungsprozesses zu berücksichtigen. Die Auswahl bereichsspezifischer Prädiktoren und zentraler mathematischer Fertigkeiten als Maßstab für die Bestimmung von normalem oder beeinträchtigtem Entwicklungsstand sowie die Bildung spezifischer Subtypen von Rechenschwäche (vgl. von Aster 1996; 2000; 2002; 2003; vgl. 2.3.3) hängen also immer von der jeweiligen Theoriebasis ab. Es lassen sich drei unterschiedliche Ansatzpunkte unterscheiden (Gerster & Schultz 2000, 223):

- „Ein Modell der mathematischen Kompetenz, dessen Komponenten (Teilleistungen) in neuropsychologischem Wissen begründet sind […];
- Mit Bezug auf Vorgaben der Lehrpläne und einer Mathematikdidaktik wird eine repräsentative Sammlung von Aufgaben erstellt, die Minimalanforderungen bestimmter Klassenstufen abdecken;
- Ein Modell über die Entwicklung der mathematischen Kognitionen, in dem entscheidende Schritte der Entwicklung dieser Kognitionen […] charakterisiert sind […]“

Derzeit bestehen entsprechend unterschiedliche Konzepte mit jeweils eigenen Schwerpunktsetzungen nebeneinander, wobei eine eindeutige Zuordnung zu einem der drei aufgelisteten Ansatzpunkte eher selten ist. Zudem gibt es zu jedem dieser Ansätze inhaltlich unterschiedliche Modelle und damit verschiedene Verfahren. Nachfolgend sollen exemplarisch diesen Ansatzpunkten entsprechend verschiedene vorschulische und schulische Testverfahren vorgestellt werden. Dabei sollen insbesondere die in 1.4 formulierten Annahmen zentraler bereichsspezifischer Nadelöhre untersucht werden.

2.3.1 Test für Vorschulkinder (Krajewski 2003)

Um zu überprüfen, ob die Entwicklungskomponenten ‚Mengenwissen’ und ‚Zahlen- und Zählwissen’ tatsächlich mathematikspezifische Vorläuferfähigkeiten darstellen, hat Krajewski (2003) in einer Längsschnittstudie u.a. die Spezifität der angenommenen Prädiktoren ‚Mengenwissen’ und ‚Zählfertigkeiten’ erhoben. Da in dieser Untersuchung mögliche frühe Prädiktoren für spätere Mathematikleistungen erstmals umfassend untersucht werden, sollen diese Längsschnittstudie und der im Kindergartenalter eingesetzte Test nachfolgend ausführlich dargestellt werden.

Die Testkonstruktion basiert auf entwicklungspsychologischen und kognitiven Informationsverarbeitungsmodellen. Insbesondere die Theorien von Piaget, Bruner, Aebli, Dehaene und Fuson wurden zugrunde gelegt. So wurden beispielsweise die Aufgaben zu Seriation und Mengenvergleich in Anlehnung an Piaget entworfen, die Aufgaben zur Zählfertigkeit an Fuson orientiert.

An der Untersuchung nahmen 126 bis 153 Mädchen und Jungen teil; die Stichprobengröße veränderte sich durch Ausscheiden und durch Hinzukommen von Kindern über die insgesamt fünf Messzeitpunkte. Der Untersuchungszeitraum umfasste das letzte Kindergartenjahr und die Eingangsstufe der Grundschule (vgl. Messzeitpunkte in untenstehender Tab. 2.1). Zur Sicherung einer wissenschaftlich fundierten Identifizierung mathematikspezifischer Vorhersagemerkmale wurden dabei drei zentrale Kriterien nach Schneider (1989) zugrunde gelegt (vgl. Krajewski 2003, 117ff.):

1. Der theoretischen Absicherung der ausgewählten spezifischen Prädiktormerkmale ‚Mengenwissen' und ‚Zählfertigkeit' dienen entwicklungspsychologische Modelle, nach denen Mengenkonzepte und Zählfertigkeiten zentrale Komponenten des Zahlbegriffs darstellen (vgl. 1.4). Krajewski erhebt zusätzlich den aus Informationsmodellen abgeleiteten Prädiktor ‚Zahleninformationsverarbeitungsgeschwindigkeit' und prüft dessen Spezifität. Die mathematikdidaktisch häufig als bedeutsam eingestuften Fähigkeiten ‚visuelle Vorstellungsfähigkeit', ‚Konzentration' und ‚Sprachverständnis' werden außerdem als unspezifische Prädiktormerkmale erhoben, da sie auch für andere, nicht-mathematische Leistungen Bedeutung haben und daher keinen zusätzlichen Informationsgewinn bezüglich der Vorhersage mathematischer Leistungen haben sollten.
2. Da Korrelationen zwischen Teilleistungsstörungen und Rechenschwierigkeiten keine kausale Beziehung darstellen, sondern lediglich ein zunächst gleichzeitiges Auftreten beider Störungsbereiche anzeigen (vgl. Fritz & Ricken 1998, 111), müssen zwischen den Prädiktoren und der Mathematikleistung eindeutig kausale Beziehungen nachgewiesen werden: Um sicher zu gehen, dass vermeintliche Ursachen nicht schlicht parallel mit vermeintlichen Wirkungen auftreten, ist Krajewskis Untersuchung als Längsschnittstudie konzipiert und setzt altersmäßig vor dem Beginn systematischen Mathematiklernens an. So werden relevant erscheinende Vorläuferfähigkeiten im Vorschulalter und zu einem späteren Zeitpunkt die tatsächlichen schulischen Mathematikleistungen erhoben.

3. Die als mathematikspezifisch beurteilten Vorläuferfähigkeiten dürfen nur die Mathematikleistungen vorhersagen, aber nicht andere Leistungsbereiche betreffen.

Die Fragestellung nach spezifischen Fähigkeiten im Vorschulalter, die spätere Mathematikleistungen (und damit auch die Entwicklungswahrscheinlichkeit einer Rechenschwäche) vorherzusagen erlauben, wird um die Frage erweitert, ob rechenschwache

Tabelle 2.1: Messzeitpunkte, Prädiktoren und verwendete Testverfahren bei Krajewski (2003) (dort entnommen, 127)

letztes Kiga-Jahr (1./2. MZP)	**spezifische Prädiktoren**	Mengenvorwissen	Seriation Mengenvergleich Längenvergleich
		Zahlenvorwissen	Zählfertigkeiten arabisches Zahlwissen Rechenfertigkeiten
		Zahlenspeed	Würfelbilder vorlesen Zahlbilder vorlesen Zahlen verbinden
	unspezifische Prädiktoren	Gedächtniskapazität	Zahlenspanne Anzahlerfassung Nachklopfen
		räumliches Vorstellungsvermögen	Bauten nachbauen Spiegelbilder
		Sprachverständnis	Lagebegriffe
		Konzentration	FTF-K
3. MZP		Intelligenz	CFT 1
1. Klasse/ 2. Klasse (4./5. MZP)	**spezifische Kriterien**	Mathematiktest	DEMAT 1+, Vorversion DEMAT 2+
		Faktenabruf	Zahlentreppe
		Lehrerurteil (nur 1. Klasse)	Mathematiknote
		mathematisches Selbstkonzept	Köpfchenliste
	unspezifische Kriterien	Rechtschreibtest	WRT 1, DRT 2
		Lesetest	WLLP
		schriftsprachliches Selbstkonzept	Köpfchenliste

Kinder andere vorschulische Defizite erkennen lassen, als Kinder mit einer kombinierten Rechen- und Rechtschreibschwäche (die Leseleistung blieb hier unberücksichtigt). Dazu werden zusätzlich schulische Schriftsprachleistungen erfasst. In Tabelle 2.1 sind Messzeitpunkte, die erhobenen spezifischen und unspezifischen Prädiktoren und Kriterien sowie die verwendeten Testverfahren dargestellt.

Die mathematikspezifischen Aufgaben verteilen sich auf drei Gruppen:

1. Aufgaben zum **Mengenvorwissen**:
   - Seriation (Käferaufgabe: Mengenbilder in eine Reihe aus Mengen einordnen; Blumenaufgabe: bidirektional gerichtete Vergleiche simultan vornehmen: „Zeige mir genau eine Blume, die größer ist als diese hier, aber kleiner als diese hier.“)
   - Mengenvergleich (Invarianzaufgaben, die durch Zählen gelöst werden können)
   - Längenvergleich (mit Hilfe der Anzahl die Ausdehnung von gleichmäßig unterteilten Streifen herausfinden)
2. Aufgaben zum **Zahlenvorwissen**:
   - Zählfertigkeiten (vorwärts, weiter und rückwärts zählen; Vorgänger und Nachfolger bestimmen, Zahlvergleich)
   - Arabisches Zahlwissen (Ziffern nach Zahlworten richtig auswählen; den Wert vorgelegter Geldstücke benennen)
   - Rechenfertigkeiten (3 Sachaufgaben zu Murmeln mit konkretem Material: 1. Kominationsaufgabe, 2. Angleichungsaufgabe, 3. Austauschaufgabe; 2 Sachaufgaben zu alltäglichen Situationen: Angleichungsaufgabe: „Im Kindergarten möchten die Kinder mit Scheren basteln. Es gibt 5 Kinder und es gibt 3 Scheren. Wie viele Scheren fehlen noch?“, durch Formulierung erschwerte Kombinationsaufgabe: „Im Kindergarten wollen die Kinder miteinander spielen. 3 Kinder holen sich jeder einen Freund. Wie viele Kinder spielen dann insgesamt zusammen?“)
3. Aufgaben zum **Zahlenspeed**:
   - Würfelbilder möglichst schnell lesen
   - Ziffern möglichst schnell lesen
   - Vermischte Ziffern möglichst schnell in der richtigen Reihenfolge verbinden

Die Zahlenverarbeitungsgeschwindigkeit stellte sich als unspezifischer Prädiktor heraus, da sie sowohl Einfluss auf die Mathematik- als auch auf die Schriftsprachleistungen zeigte. Vorschulisches Zahlenvorwissen (hier: Zählfertigkeiten, arabisches Zahlwissen und Rechenfertigkeiten) beeinflussten dagegen direkt schulische Mathematikleistungen und zwar deutlicher als Intelligenz. Vorschulisches Mengenvorwissen (hier: Seriation, Mengenvergleich und Längenvergleich) wirkte nur indirekt auf die Mathematikleistungen, indem Kompetenzen in diesem Bereich zunächst zu besserem Zahlenvorwissen führte und darüber zu besseren Mathematikleistungen.

Allerdings erscheint die Zuordnung der einzelnen Aspekte zu den Prädiktoren uneinheitlich, da beispielsweise die dem Mengenvorwissen zugeordnete Seriation auch eine sequenzielle Anforderung ist. So erfordert die erste Seriationsaufgabe, bei der Lücken in einer Reihe mit Punktmustern versehener Marienkäfer *anzahl*mäßig korrekt zu ergänzen sind, sowohl sequenzielles als auch Mengenwissen sowie Einsicht in das Konstruktionsprinzip der Zahlreihe und wäre somit sowohl dem Prädiktor ‚Zahlenvorwissen' als auch ‚Mengenvorwissen' zuzuordnen.

Die dem Zahlenvorwissen zugeordneten Rechenaufgaben sind zum Teil auf der Ebene von Mengenmanipulationen oder durch Zählen lösbar. Bestimmte Aufgaben setzen sogar kardinales Verständnis voraus: So wurde den Kindern beispielsweise folgende Austauschaufgabe vorgelegt (mit Murmeln) (vgl. Krajewski 2003, 135):

Hier hast du neun Murmeln. Wie viele hast du noch übrig, wenn du mir drei abgibst?

Diese Aufgabe beinhaltet bereits komplexe Anforderungen, die ohne jegliche Integration von Mengen- und Zählwissen nicht zu lösen wäre; das Kind muss zur Lösung dieser Aufgabe über umfassendere ordinale und kardinale Einsichten verfügen. Nachfolgend soll deshalb noch mal an obige Ausführungen zu solchen Aufgabentypen Bezug genommen werden: Bei einfachen Additionsaufgaben können alle beteiligten Objektmengen gezählt werden, was daher als counting all-Strategie bezeichnet wird (vgl. Fuson 1992a, 67f.). Schlichte Subtraktionsaufgaben werden bereits sehr früh durch Vorwärtszählen bewältigt. Ebenso wie der in 1.4.3.2 diskutierten Aufgabe

Connie hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Jim 3 Murmeln ab. Wie viele Murmeln hat sie jetzt noch?

liegt Krajewskis Aufgabe

Hier hast du neun Murmeln. Wie viele hast du noch übrig, wenn du mir drei abgibst?

die Aufgabenstruktur $8 - 3 = ?$ bzw. $9 - 3 = ?$ zugrunde. Wird diese Aufgabe nach der separate from-Strategie (vgl. Fuson 1988, 261) nicht durch das entwickeltere Rückwärts-, sondern durch früher verfügbares Vorwärtszählen gelöst, sind sowohl „count-to-cardinal transitions“ als auch „cardinal-to-count transitions“ zu vollziehen: Von der Ausgangsmenge (8 bzw. 9 Murmeln) müssen 3 Elemente weggenommen („separate from“) und die verbliebenen Elemente (vorwärts) ausgezählt werden. Dabei erfordert dieses Wegnehmen von Elementen aus der Ausgangsmenge eine „cardinal-to-count transition“, da aus letzterer die bekannte Teilmenge (3 Murmeln) heraus *ab*gezählt werden muss. Ein Lösungszugang durch Rückwärtszählen würde ein Zurückzählen *um* 3 Zählschritte erfordern, die Zählschritte müssten also bereits als eigenständige Zähleinheiten aufgefasst werden können. Der individuelle Lösungszugang bei solchen Aufgaben ist also sehr interessant, da so vorhandene Zählfertigkeiten differenzierter erfasst werden könnten.

Wird die inhaltliche Zuordnung der Testitems bzw. die Interpretation der Bedeutung der einzelnen Leistungen für spätere Mathematikleistungen entsprechend anders gewichtet, wäre das Mengenvorwissen zum Teil im Prädiktor ‚Zahlenvorwissen’ enthalten. Die schwächere Auswirkung des Prädiktors ‚Mengenvorwissen’ könnte so auf die vorgenommene Unterteilung zurückzuführen sein. Die Prädiktoren erlauben zudem keine differenzierte Einsicht in Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilfertigkeiten, so dass nicht erfasst werden kann, ob ein Kind parallel über unverbundene Teilfertigkeiten oder ob es darüber bereits in deren Integration verfügt. Insgesamt aber belegen Krajewskis Befunde, dass mengen- und zahlenbezogenes Vorwissen die zentralen Merkmale zur Vorhersage späterer Mathematikleistung sind.

2.3.2 Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ)

Mit dem Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) von Luit et al. (2001) liegt ein Instrument zur diagnostischen Früherkennung vor für den Altersbereich von 4;6 bis 7;6 Jahren, also für den Einsatz in Kindergarten und Schuleingangsstufe.

Der OTZ liegt in zwei Parallelformen vor und wird als Einzeltest durchgeführt. Es werden keine Zeitvorgaben im Einzelnen gemacht, die maximale Bearbeitungszeit wird jedoch auf 30 Minuten beschränkt. Der Aufgabenpool besteht aus insgesamt 80 Aufgaben, aufgeteilt auf die beiden Paralleltestformen. Damit soll das Konstrukt ‚früher Zahlbegriff’ gemessen werden, zu dessen Operationalisierung Aufgaben zu den verschiedenen Komponenten der frühen mathematischen Entwicklung konstruiert wurden. Theoretische Grundlage bildeten dabei insbesondere Befunde und Modelle von Piaget & Szeminska (1972) und von zur Oeveste (1987) zur Mengeninvarianz, Klassifikation, Seriation und 1-zu-1-Zuordnung sowie Untersuchungen zur Zählentwicklung von Fuson (1988), Gelman & Gallistel (1978) und Wynn (1990) (vgl. dazu 1.4 und 1.5.1). Aus der

Analyse früherer Studien der Testautoren zur frühen Zahlbegriffsentwicklung (vgl. Luit et al. 2001, 9; Rijt et al. 2000, 15) wurden folgende acht Wissenskomponenten abgeleitet, denen jeweils 5 Testaufgaben zugeordnet werden (vgl. Luit et al. 2001, 12ff.):

1. Vergleichen (qualitativ und quantitativ: höher, dicker, niedriger, weniger etc.)
2. Klassifizieren (Objekte nach übereinstimmenden Merkmalen klassifizieren)
3. Eins-zu-eins-Zuordnen (Vergleich von Mächtigkeiten verschiedener Mengen)
4. Nach Reihenfolge ordnen (z.B. von hoch nach niedrig, von dick nach dünn)
5. Zahlwörter benutzen (vorwärts-, rückwärts- und weiterzählen; zählen in Zweierschritten; Verwendung von Kardinal- und Ordinalzahlen)
6. Synchrones und verkürztes Zählen (Auszählen mit Berühren oder Zeigen; strukturiertes Erfassen von Würfelzahlbildern und Zusammenzählen der Augen zweier Würfel; Zählen rückwärts mit Zeigen auf Objekte)
7. Resultatives Zählen (visuelles Zählen strukturierter und unstrukturierter Mengen; Abzählen (Vorgabe 15 Würfel: „Lege eine Reihe mit elf Würfeln.“); Weiterzählen bzw. Addieren im Kopf (5 Würfel verdecken, dann 7 weitere Würfel dazu schieben und verdecken: „Wie viele Würfel habe ich jetzt unter meiner Hand?“))
8. Anwenden von Zahlenwissen (Verstehen von Zahlen in Alltagsbezügen: z.B. Fenster einer Gebäudeabbildung zählen oder eine Figur nach gewürfelten Anzahlen auf einem Spielplan versetzen; einfache Sachaufgaben: z.B. „Du hast neun Murmeln. Du verlierst drei Murmeln. Wie viele Murmeln hast du übrig?“)

Diese Aspekte werden als Komponenten des frühen Zahlbegriffs aufgefasst, über die sich die Entwicklung des Konstruktes ‚Zahlbegriff’ repräsentieren lässt (vgl. Rijt et al. 2000, 15). Bei der Analyse der Aufgabenschwierigkeiten legte eine Hauptkomponentenanalyse eine einfaktorielle Lösung nahe (vgl. Luit et al. 2001, 10). Danach nehmen die Testautoren einen eindimensionalen Zahlbegriff an, der sich durch das Kontinuum der 80 Testaufgaben definieren lässt.

Das Gesamtergebnis eines Kindes wird mit Hilfe einer Tabelle in einen Prozentrangwert (PR) umgewandelt. Für die Interpretation stehen Normen für fünf Altersgruppen zwischen 5 und 7;6 Jahren zur Verfügung. Die Zahlbegriffsentwicklung kann danach auf fünf unterschiedlichen Niveaus angesiedelt sein (vgl. ebd., 27):

- A (PR 76-100): Gut – sehr gut (~ 25% der besten der Altersgruppe).
- B (PR 51-75): Befriedigend – gut (~ 25% knapp über Durchschnitt).
- C (PR 26-50): Mäßig – befriedigend (~ 25% knapp unter Durchschnitt).

- D (PR 11-25): Schwach – mäßig (~ 15%, die mehr als die schwächsten 10%, aber weniger als 75% der Altersgruppe erreicht haben).
- E (PR 0-10): Sehr schwach – schwach (~ 10% der schlechtesten der Altersgruppe).

Das Kompetenzniveau eines Kindes lässt sich an einer Skala ablesen, die sowohl den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben als auch das Kompetenzniveau der getesteten Kinder abbildet. Diese Skala zeigt, welche Aufgaben ein Kind mit einem bestimmten PR wahrscheinlich korrekt und welche es nicht korrekt bearbeiten kann. In der nachfolgenden Tabelle 2.3 werden die Skalen des OTZ dargestellt, ergänzt um die Zuordnung der fünf Niveaus der Zahlbegriffsentwicklung (Aufgabenschlüssel s. Tabelle 2.2).

Tabelle 2.2: Aufgabenschlüssel OTZ (für Skala A und B) (entnommen aus Luit et al. 2001, 37f.)

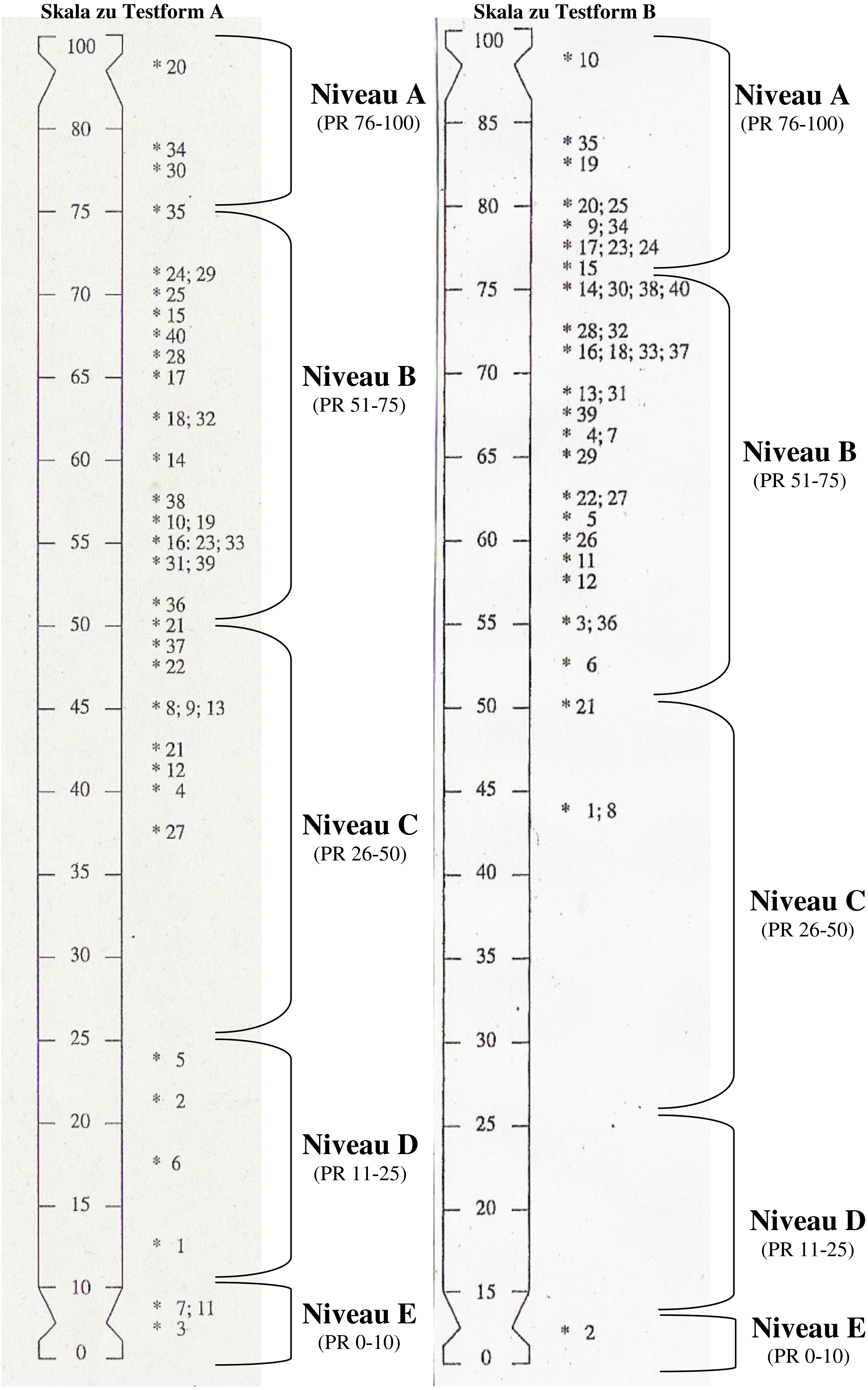
Aufg. 1 – 5:	Vergleichen
Aufg. 6 – 10:	Klassifizieren
Aufg. 11 – 15:	1-zu-1-Zuordnung
Aufg. 16 – 20:	Seriation
Aufg. 21 – 25:	Zahlwörter benutzen
Aufg. 26 – 30:	Synchrones & verkürztes Zählen
Aufg. 31 – 35:	Resultatives Zählen
Aufg. 36 – 40:	Anwenden von Zahlenwissen

Ein solch eindimensionales Konstrukt des Zahlbegriffs führt im Groben zu folgender diagnostischer Kategorisierung: Kinder mit sehr schlecht entwickeltem Zahlbegriff bewältigen nur sehr wenige und leichte Aufgaben, Kinder mit besser entwickeltem Zahlbegriff bewältigen diese und weitere schwierigere Aufgaben und Kinder mit sehr weit entwickeltem Zahlbegriff bewältigen alle diese Aufgaben und noch die Aufgaben mit dem höchsten Schwierigkeitsgrad. Welche Aufgaben das im Einzelnen sind, lässt sich an den Skalen ablesen (vgl. Tab. 2.3).

Dabei fällt auf, dass die besonders leichten, bereits auf Niveau E gekonnten Aufgaben in Skala A sämtlich aus den ersten drei Aufgabenkategorien stammen: Vergleichen, Klassifizieren, 1-zu-1-Zuordnung. In Skala B findet sich dort dagegen nur eine einzige Aufgabe, und zwar aus dem Bereich ‚Vergleichen'. Dem zweitschwächsten Niveau D werden in Skala A nur Aufgaben aus den ersten beiden Aufgabenbereichen zugeordnet, in Skala B finden sich gar keine zugehörigen Aufgaben. Auch Niveau C lassen sich in Skala B nur zwei Aufgaben zuordnen: Zwei aus dem Bereich ‚Klassifizieren' und eine aus dem Bereich ‚Zahlwörter benutzen'. Die meisten Aufgaben werden in Skala B dem Niveau B und etwas weniger dem Niveau A zugeordnet. Damit scheint sich Skala B weniger zur Erfassung des unteren und mittleren Leistungsbereiches zu eignen.

Tabelle 2.3: OTZ-Skalen mit Niveaus der Zahlbegriffsentwicklung (entnommen aus Luit et al. 2001, 37f.; Niveauergänzungen M.G.)

Skala zu Testform A **Skala zu Testform B**



Skala A erscheint in dieser Hinsicht ausgewogener. Betrachtet man dort die Aufgabenschwierigkeiten, so lässt sich keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenbereiche feststellen, lediglich ganz leichte Tendenzen: Nur der Bereich ‚Vergleichen' verteilt sich auf die unteren Niveaus E bis C. U.a. auf beide oberen Niveaus verteilen sich Aufgaben der Bereiche ‚Nach Reihenfolge ordnen', ‚Synchrones und verkürztes Zählen' und ‚Resultatives Zählen'. Auf dem mittleren Niveau C finden sich Aufgaben aus allen Bereichen mit Ausnahme ‚Nach Reihenfolge ordnen' und ‚Resultatives Zählen'. In Skala B stellt sich die Verteilung jedoch gänzlich anders dar – beispielsweise verteilen sich dort auf Niveau B Aufgaben aller Bereiche mit Ausnahme des Bereiches ‚Vergleichen' – so dass keine allgemeingültigen Schlüsse gezogen werden können. Festhalten lässt sich jedoch, dass die Aufgabenbereiche des OTZ nicht aufeinander aufbauen, sondern in ihrem Schwierigkeitsgrad zum Teil erheblich streuen. Im unteren Leistungsbereich differenziert der OTZ wenig, so dass nur sichtbar gemacht werden kann, was das Kind *nicht* kann. Die vorhandenen Kompetenzen werden nicht erfasst.

Daher sollen ausgewählt einige Anforderungen genauer betrachtet werden: Die Anforderungen von Subtest 2 ‚Klassifizieren' basieren auf der gleichen Fähigkeit wie von Subtest 1 ‚Vergleichen', da Klassifizieren ein Vergleichen nach gleich/ungleich-Kriterien erfordert (vgl. Resnick 1983; 1989; Resnick et al. 1991; vgl. 1.4.1). Die Klassifikationsaufgaben stellen ebenso wie die Vergleichsaufgaben mit Ausnahme einer Aufgabe aus Testform B und 2 aus A (A: weniger und die wenigsten; B: mehr) pränumerische Anforderungen dar. Die Zusammenhänge werden mit einem Korrelationswert von .44 bestätigt. Ein Vergleich der Schwierigkeiten anhand der Skalen ist aufgrund der breiten und in den Skalen unterschiedlichen Verteilung nicht möglich.

Die Zählfertigkeiten werden nach dem Oberflächenmerkmal ‚Zählen' zusammengefasst, beinhalten jedoch heterogene und unterschiedlich schwierige Zählaspekte: In dem Bereich 5. ‚Zahlwörter benutzen' sind jeweils eine mündliche Zählaufgabe vorwärts (z.B. „Zähle bis zwanzig“), Aufgaben zur Zahlwort-Menge-Zuordnung, zum Weiterzählen, zur Ordinalzahlverwendung (z.B. „Zeige auf die achtzehnte Blume“) und zum Zählen in Zweierschritten zusammengefasst. In der Testform B findet sich noch eine Aufgabe zum Rückwärtszählen. Unter 6. ‚Synchrones und verkürztes Zählen' in Testform A finden sich folgende Aufgabenstellungen: Auszählen, quasi-simultane Anzahlerfassung und Rückwärtsauszählen einer Menge. Unter der gleichen Rubrik in Testform B findet sich dagegen neben dem Auszählen auch die wesentlich schwierigere Anforderung ‚Abzählen'. In dem Bereich 7. ‚Resultatives Zählen' findet man neben Abzählaufgaben (nur Testform A) und visuellen Auszählaufgaben noch Aufgaben zu einfachen Additionen und Subtraktionen (Subtraktion nur in Testform B) (z.B. „Drei Würfel liegen unter meiner Hand. Ich füge zwei Würfel hinzu. Wie viele Würfel liegen jetzt unter meiner Hand?“). In beiden Bereichen 6. und 7. stecken zum Teil gleiche Anforderungen (6.: „Bilde eine Reihe mit fünf Würfeln. […]“ und 7.: „Lege eine Reihe mit elf Würfeln.“) und es werden zum Teil Fragen nach der Anzahl gestellt („Wie viele?“). Die Anforderungen erscheinen entsprechend heterogen zusammengestellt sowie ungleichmäßig auf die beiden Testformen verteilt. Hinter dem ermittelten Wert dieser Aufgabenbereiche verbergen sich damit zum Teil unterschiedliche Leistungen.

Die relativ hohen und gleichmäßigen Korrelationen zwischen den Testkomponenten belegen zwar die Annahme, dass „diese acht Komponenten zu der gleichen (mathematischen) Kompetenz gehören“ (Luit et al. 2001, 31). Dennoch lassen sich einige interessante Zusammenhänge zwischen bestimmten Aufgabenbereichen feststellen: Die höchsten Korrelationen bestehen zwischen 5. ‚Zahlwörter benutzen’ und 6. ‚Synchrones und verkürztes Zählen’, 7. ‚Resultatives Zählen’ und 8. ‚Anwenden von Zahlenwissen’ sowie zwischen 6. und 7. und zwischen 7. und 8. Das passt zu den vorgängig formulierten Überschneidungen der Aufgaben zum Zählen.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die ungleichmäßig auf die beiden Testformen verteilten Anforderungen und die Zusammenfassung heterogener Anforderungen sowohl die breite Streuung der Aufgaben über die fünf Niveaus der Zahlbegriffsentwicklung als auch die unterschiedliche Verteilung in Skala A und B erklären können. Zudem erlaubt die Heterogenität der Subtests nur eine quantitative Betrachtung der gemessenen Leistung.

2.3.3 Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern (ZAREKI und ZAREKI-K)

Die „Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern“ ZAREKI-K (von Aster et al. 1999) für Kinder im letzten Kindergartenjahr und ZAREKI (von Aster 2002) für Schulkinder sollen wesentliche Aspekte der Zahlverarbeitung und des Rechnens erfassen.

Dieses neuropsychologisch basierte differentielle Diagnostikum bezieht sich – im Gegensatz beispielsweise zum DEMAT 1+ (s. 2.3.5) – nicht explizit auf Lehrplaninhalte. Konzipiert als Individualtests ohne zeitliche Begrenzung ermöglichen beide ZAREKI-Verfahren quantitative und qualitative diagnostische Aussagen darüber, welche basalen Aspekte der Zahlenverarbeitung und des Rechnens beeinträchtigt bzw. nicht beeinträchtigt sind. Im Gegensatz zu anderen neuropsychologisch basierten Verfahren, die sich auf an Entwicklung und Prozessen der Zahlenverarbeitung beteiligte grundlegende Hirnfunktionen wie z.B. visuell-räumliche oder motorische Funktionen konzentrieren, nimmt von Aster die Prozesse von Zahlenverarbeitung und Rechnen selbst in den Blick (vgl. von Aster 1996, 178). Hier sollen also rechenrelevante Teilleistungen untersucht, die Schwierigkeiten modulbezogen systematisiert und die Leistungsfähigkeit einzelner Repräsentationen eingeschätzt werden können (vgl. Ricken 2003a, 270).

Die Aufgaben beider Verfahren basieren zum einen auf Dehaenes neurokognitionspsychologischer Theorie zahlspezifischer Informationsverarbeitungsprozesse über vernetzte Hirnfunktionsmodule („Triple Code Model"; Dehaene 1992; vgl. 1.4.1). Danach können zahlbezogene Informationen in den Formaten ‚Zahlwort', ‚Ziffer' und ‚analoge Mengenbedeutung' verarbeitet werden. Erfordert eine komplexe Aufgabe die Beteiligung mehrerer Module, treten diese untereinander in Verbindung. Übersetzungen von Zahlen können dabei auf einem semantischen und (bei Übersetzungen zwischen Zahlwort- und Zifferformaten) auf einem asemantischen Weg erfolgen (vgl. von Aster 1996, 10). Für eine semantische Zahlenverarbeitung ist das analoge Repräsentationsmodul zuständig (vgl. ebd., 15). Dieses stellt von Aster zufolge das eigentliche Zahlverständnis dar (vgl. ebd., 12). Dieser Aspekt wird nach Darstellung der ZAREKI unten aufgenommen und diskutiert. Da Zahlworte und Ziffern kulturvermittelt sind, kann von einer Entwicklungsreihenfolge ausgegangen werden, in der der mengenbezogene, analog-semantische Modul zuerst und der ziffernbezogene, visuell-arabische Modul zuletzt entwickelt wird. Im Entwicklungsverlauf differenzieren sich die einzelnen Module aus. Dieser Komplexität von Zahlkontexten und -bedeutungen entsprechend sollen mit ZAREKI-K und ZAREKI die verschiedenen Aspekte in spezifischen Subtests erfasst werden können.

Zum anderen wird der theoretische Hintergrund der ZAREKI-K und der ZAREKI von entwicklungspsychologischen Befunden und Annahmen zur frühen oder angeborenen Verfügbarkeit numerischer Fertigkeiten der Erfassung kleiner Anzahlen (subitizing), der Unterscheidung unterschiedlicher Anzahlen und der Wahrnehmung von Veränderungen an diskreten Mengen sowie zum Erwerb der Zählprinzipien nach Gelman & Gallistel bestimmt (vgl. ebd., 16ff.; vgl. auch 1.3 und 1.4.2). Dabei geht von Aster (ebd., 18f.) davon aus, dass sich nach dem Erwerb des Kardinalprinzips nach Gelman & Gallistel (1978) die Fähigkeit zum zählenden Lösen von Additions- und

Subtraktionsaufgaben entwickelt und mit Schulbeginn bereits Zahlzerlegungen möglich werden, „weil Teilaspekte schon aus dem Gedächtnis verfügbar sind“ (ebd., 19).

Da im Gegensatz zur ZAREKI-K zum Schultest bereits Daten zu den Testgütekriterien vorliegen, soll die Darstellung von ZAREKI vorgezogen werden, um daran diskutieren zu können, inwiefern der Modulansatz diagnostisch brauchbare Einteilungen bietet.

2.3.3.1 ZAREKI

ZAREKI ist als Individualtest für Kinder der zweiten bis vierten Jahrgangsstufe konzipiert, wurde an einer Stichprobe von 238 Schweizer Kindern normiert und erfasst in 11 Subtests modulspezifische Aspekte der Zahlverarbeitung und des Rechnens. Damit wird versucht, die spezifischen Verarbeitungsmodule zu operationalisieren und die verschiedenen numerischen Aspekte in separaten Aufgabengruppen zu prüfen (vgl. Weinhold Zulauf et al. 2003, 223ff.): Dem analog-semantischen Modul werden das Schätzen von Mengenmächtigkeit, Mengenvergleich und Überschlagsrechnen zugeordnet, dem zahlwortbezogenen, auditiv-sprachlichen Modul Zählprozeduren, Speicherung numerischen Faktenwissens, exaktes Rechnen und dem visuell-arabischen Modul Ziffernkenntnis, Umgang und Operieren mit mehrstelligen Zahlen sowie die Beurteilung von Zahlen nach gerade und ungerade. Die ausgewählten, inhaltlich und formal in vielen Tests üblichen Aufgaben sollen hier den einzelnen Modulen zuzuordnen sein, so dass derart systematisiert Aussagen über modulspezifische Leistungen getroffen werden können. Jeder Subtest soll „einen möglichst umschriebenen Fertigkeitenbereich prüfen“ und mit den „einzelnen Items qualitativ unterschiedliche Schwierigkeiten abgreifen“ (von Aster 1996, 67).

ZAREKI umfasst folgende Aufgaben (vgl. von Aster 2002, 17ff.):

1. Abzählen [*Aus*zählen; M.G.] von Punktmengen
2. Rückwärtszählen von 22
3. Zahlenschreiben (Transkodieren: 2- bis 4-stellige Zahlen nach Diktat schreiben)
4. Kopfrechnen
    4.a Kopfrechnen: Additionen (im Zahlenraum bis 32)
    4.b Kopfrechnen: Subtraktionen (im Zahlenraum bis 20)
5. Zahlenlesen (Transkodieren: zwei- bis vierstellige Zahlen lesen)
6. Zahlenstrahl (Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl im Zahlenraum bis 100)
7. Zahlenvergleich (mündlich mit zwei- bis vierstelligen Zahlen)
8. Perzeptive Mengenbeurteilung (Schätzen)

9. Kognitive Mengenbeurteilung (kontextbezogene Einschätzung von Zahlworten nach ‚viel', ‚mittel', ‚wenig')
10. Textaufgaben (mündlich)
11. Zahlenvergleich (visuell mit zwei- bis fünfstelligen Ziffern)

Damit wird überprüfbar, ob ein Kind Zahlworte und -zeichen kennt, ob es ein Verständnis für Mengen hat und ob die notwendigen Transferprozesse möglich sind. Bis auf wenige Ausnahmen werden die Aufgaben nicht explizit einzelnen Modulen zugeordnet, sondern zur Interpretation eine Faktorenanalyse zur Verfügung gestellt (s.u.).

Auf der Basis der ZAREKI-Testleistungen rechenschwacher Kinder des zweiten bis vierten Schuljahres wurde eine Personenclusteranalyse durchgeführt, um Gruppen ähnlicher Merkmalsausprägung unterscheiden zu können (vgl. ebd., 14, 31; von Aster 2003, 173): Diese Befunde sowie die der klinischen Extremstichprobe bestehend aus N = 40 kinderpsychiatrisch behandelten Kindern mit Rechenstörungen sprechen dafür, dass sich Rechenschwierigkeiten modulspezifisch unterscheiden lassen. Allerdings weisen die Interkorrelationswerte in der klinischen Gruppe „auf eine weniger differenzierte (oder modularisierte) Zahlenverarbeitung bei rechenschwachen Kindern" hin (von Aster 2002, 31). Eine Clusteranalyse mit dem Ergebnis von vier Personenclustern führte zu der Festlegung von vier Rechenschwäche-Subtypen (vgl. von Aster 1996, 132ff., 172ff.; 2000, 48). Von den vier identifizierten zeigen jedoch nur drei Subtypen Leistungsdefizite von mehr als einer Standardabweichung; diese werden als „Gruppe von Kindern mit **kognitiv-neuropsychologisch begründeten Rechenstörungen**" und die übrigen Kinder als „**Risikogruppe rechenschwacher Kinder**" bezeichnet (von Aster 1996, 172; Hervorh. i. Orig.). Für letztere werden also keine neuropsychologischen Beeinträchtigungen verantwortlich gemacht. In den nachfolgenden Forschungen von Asters wurden deshalb nur die übrigen drei Subtypen berücksichtigt:

Die Personencluster unterscheiden sich hinsichtlich des Schweregrades der Defizite und des Leistungsprofils (vgl. ebd., 137). Aufgrund dieser Befunde kann die Bewertung einer ZAREKI-Testleistung als Zuordnung zu einem dieser drei empirisch ermittelten Subtypen auf der Grundlage des Modul-Ansatzes erfolgen (vgl. von Aster 2002; 2003, 173f.): Es werden ein tiefgreifender, ein sprachlicher und ein arabischer Subtyp unterschieden, wodurch Leistungsausfälle auf spezifische Verarbeitungsmodule zurückgeführt werden können. Kinder des tiefgreifenden und des arabischen Subtyps zählten dabei vorwiegend zur klinischen, Kinder des sprachlichen Subtyps dagegen überwiegend zur Normalpopulation (vgl. von Aster 1996, 142ff.).

Die Gruppe ‚**Tiefgreifender Subtyp**' umfasst Kinder mit besonders massiven Rechenschwierigkeiten in nahezu allen mit ZAREKI überprüften Fertigkeitsbereichen. Das Gesamtleistungsniveau dieser Kinder liegt mehr als 2 Standardabweichungen unterhalb des Mittelwertes der Normalgruppe (vgl. ebd., 134). Bei diesen Kindern scheinen die vorsprachlichen numerischen Kompetenzen nicht ausreichend entwickelt zu sein. Neben den ausgeprägten Rechenschwierigkeiten fallen die Kinder häufig auch durch Lese- und Rechtschreibschwierigkeiten, Verhaltensauffälligkeiten und emotionale Probleme auf.

Die Gruppe ‚**Sprachlicher Subtyp**' umfasst Kinder mit Schwierigkeiten im Bereich der Zählfertigkeiten und des Kopfrechnens. Diese Kinder verfügen vermutlich über ausreichendes Mengenverständnis, ihre Zählfertigkeiten und -strategien sind jedoch aufgrund von Störungen der Sprachentwicklung, der Aufmerksamkeit oder des Arbeitsgedächtnisses besonders fehleranfällig. Stärken zeigen Kinder dieses Subtyps besonders bei Zahlenstrahlaufgaben, kognitiver Mengenbeurteilung und Textaufgaben (vgl. ebd., 133).

Kinder des dritten, **arabischen Typs** fallen durch Transkodierungsfehler und durch Schwierigkeiten beim Zahlvergleich auf verbaler oder symbolischer Ebene auf. Stärken dieser Kinder liegen beim Abzählen und bei perzeptiver Mengenbeurteilung (vgl. ebd.).

Von Asters Subtypenbildung kann in Übereinstimmung gebracht werden mit der unter Bezug auf die diagnostischen ICD-10-Kategorien vorgenommene Unterteilung in **zwei Untergruppen von Rechenstörungen** (vgl. Hemminger et al. 2000, 195f.):

Typ 1 weist Störungen in der Zahlensemantik auf, was sich u.a. in unzureichender Einsicht in Zahlkonzepte, -beziehungen und Operationen und in fehlerhafter Entwicklung gegliederter Zahlenraumvorstellungen äußert. Dieser Typ kann mit von Asters tiefgreifendem Subtypus verglichen werden. **Typ 2** hat Schwächen in den Bereichen der sprachlichen oder arabisch-symbolischen Zahlkodierung und -verarbeitung. Das zeigt sich u.a. in Schwierigkeiten beim Erwerb der Zahlwortsequenz, von Zählfertigkeiten, von Faktenwissen, des arabischen Stellenwertsystems und in Transkodierungsproblemen. In diese Kategorie passen von Asters sprachlicher und arabischer Subtyp.

Um beurteilen zu können, ob diese Subtypenbildung hinsichtlich des Informationsgehaltes für gezielte Förderung hilfreich ist, soll nachfolgend untersucht werden, auf welcher Basis die Konstruktvalidität bestimmt worden ist, ob und wie präzise also die in den Items operationalisierten Teilleistungen Aspekte der jeweils zugeordneten Module sind.

Die Subtests weisen insgesamt niedrige Reliabilitäten zwischen .22 und .78 auf (vgl. von Aster 2002, 31). Dies steht möglicherweise mit der Heterogenität der ZAREKI-

Aufgaben in Zusammenhang; das wird im weiteren Verlauf an den entsprechenden Stellen zu diskutieren sein. Die Subtests werden den Modulen wie folgt zugeordnet (vgl. Tab. 2.4). Die Tabelle zeigt, dass bei vielen Subtests zwei oder sogar alle drei Module

Tabelle 2.4: Zuordnung der ZAREKI-Subtests zu den Modulen (Ausschnitt)
(Tabelle entnommen aus von Aster 2002, 26)

	Modulare Repräsentation																																
	Zahlwort											Arabische Zahl											Analoge Grösse										
Subtests	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
involviert	■	■	■	■	■	■		■	■		■	■		■		■		■			■		■					■	■	■	■	■	■

Kodierung der Subtests:

1. Abzählen
2. Zählen rückwärts mündlich
3. Zahlenlesen
4. Kopfrechnen (Additionen und Subtraktionen)
5. Zahlenschreiben
6. Zahlenvergleich (Worte)
7. Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl
8. Perzeptive Mengenbeurteilung
9. Kognitive (kontextuelle) Mengenbeurteilung
10. Zahlenvergleich (Ziffern)
11. Textaufgaben

dule involviert sind. Eine eindeutige modulspezifische Zuordnung der Aufgaben erscheint danach schwierig. Ausschließlich die Aufgaben ‚2. Zählen rückwärts mündlich' und ‚4. Kopfrechnen (Additionen und Subtraktionen)' können dieser Tabelle zufolge einem einzigen Modul, der zahlwortbezogenen auditiv-sprachlichen modularen Repräsentation zugeordnet werden. Dies wird durch die Faktorenanalyse der Eichstichprobe bestätigt, nach der diese beiden (bzw. drei) Aufgaben den zweiten Faktor bilden.

Diese Faktorenanalyse (vgl. ebd., 33f.) zur Bestimmung der Konstruktvalidität zeigt, welche Subtests eng miteinander korrelieren. Das gefundene Korrelationsmuster führte zu einer vierfaktoriellen Lösung, wobei der erste Faktor 26%, der zweite 12%, der dritte

Tabelle 2.5: Faktorenanalyse der ZAREKI-Eichstichprobe (entnommen aus von Aster 2002, 33)

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4
Abzählen	-0.032	0.070	0.244	0.791
Zählen rückwärts mündlich	0.132	0.215	-0.719	0.135
Zahlenschreiben	0.842	0.169	-0.090	0.003
Kopfrechnen Additionen	0.157	0.747	-0.012	-0.001
Kopfrechnen Subtraktionen	0.148	0.822	-0.023	-0.033
Zahlenlesen	0.854	-0.017	0.121	-0.076
Anordnen auf einem Zahlenstrahl	0.231	0.127	0.621	0.172
Zahlenvergleich (Worte)	0.677	0.218	-0.086	-0.065
Perzeptive Mengenbeurteilung	0.032	0.132	0.346	-0.622
Kognitive Mengenbeurteilung	0.660	0.043	0.107	0.109
Textaufgaben	0.589	0.119	0.313	-0.077
Zahlenvergleich (Ziffern)	0.585	0.148	0.187	-0.009

10% und der vierte 9% der Gesamtvarianz aufklärt. Die in der Tabelle 2.5 unterlegten Werte zeigen, welche Subtests von welchen Faktoren erfasst werden.

Aus dem **ersten Faktor** wird der Index **„kulturvermitteltes Zahlenwissen“** gebildet. Dort werden Fertigkeiten zusammengefasst, „in denen sich die Reifung und Ausdifferenzierung der drei Module und ihrer transmodularen Verknüpfungen (Transkodierungsregeln) widerspiegeln“ (ebd., 34). Die hierunter fallenden Aufgaben (vgl. Tab. 2.5) lassen sich ebenso wie die Faktor 3 bildenden Aufgaben nach der Tabelle 2.4 jeweils zwei Modulen zuordnen, was für entsprechende „transmodulare“ Verbindungen spricht.

Bei den Aufgaben zur kognitiven Mengenbeurteilung und zu den Zahlvergleichen auf Ziffernebene sind nach der Tabelle 2.4 jeweils zusammen mit dem analog-semantischen Modul entweder der auditiv-sprachliche oder der visuell-arabische Modul involviert. Für eine richtige Bearbeitung müssen Zahlworte bzw. Ziffernkenntnis bereits mit Mengenvorstellungen zu einem entwickelten Zahlbegriff integriert sein. Der Reliabilitätskoeffizient des Subtests ‚Zahlenvergleich (Ziffern)’ beträgt lediglich .40 (vgl. ebd., 31).

Ebenso sind bei der Bearbeitung der Textaufgaben entsprechend zwei Module, die auditiv-sprachliche und die analog-semantische Repräsentation involviert. Neben Anforderungen auf sprachlich-logischer Ebene und an Zahl- und Operationsverständnis erfordert die Bearbeitung von Textaufgaben bzw. die Mathematisierung der dargestellten Situation auch eine Situationsanalyse, die Entwicklung eines passenden mathematischen Lösungsmodells aus der sprachlich kodierten Problemstellung und zum Teil mehrschrittige Planungs- und Überwachungsprozesse (vgl. 3.3.4). Um die mit den ZAREKI-Textaufgaben verbundenen, teilweise bereits hochkomplexen Anforderungen zu illustrieren, sollen diese genauer analysiert werden:

- <u>Aufgabe 1</u>: Peter hat 12 Murmeln. Er gibt 5 Murmeln seiner Freundin Anne. Wie viele Murmeln behält er übrig? [Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt]
- <u>Aufgabe 2</u>: Peter hat 16 Murmeln. Er hat 4 Murmeln mehr als Anne. Wie viele Murmeln hat Anne? [Vergleichsaufgabe, Referenzmenge unbekannt]
- <u>Aufgabe 3</u>: Peter hat einige Murmeln. Er gibt Anne 6 Murmeln ab. Nun bleiben ihm 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte Peter am Anfang? [Austauschaufgabe, Startmenge unbekannt]
- <u>Aufgabe 4</u> (aufgrund des hohen Schwierigkeitsgrades nicht in die Normierung aufgenommen): Jetzt kommt Jakob dazu und sie spielen zu dritt. Peter hat 4 Murmeln, Anne hat 3 Murmeln mehr als Peter, und Jakob hat 2 Murmeln weni-

ger als Anne. Wie viele Murmeln haben alle 3 zusammen? [Vergleichsaufgabe, Vergleichsmenge unbekannt + Kombinationsaufgabe, Gesamtmenge unbekannt]

Aufgabe 1 erfordert über einfaches Vorwärtszählen hinausgehende elaboriertere Kompetenzen und integrierte ordinale und kardinale Einsichten. Die Vergleichssituationen in Aufgabe 2 und 4 erfordern neben integrierten ordinalen und kardinalen Konzepten auch einen relationalen Zahlbegriff. Der besonders schwierige Typ in Aufgabe 3 mit der Struktur $\_ - b = c$ kann nicht zählend gelöst werden, sondern erfordert numerische oder zumindest quantifizierte Teile-Ganzes-Konzepte (vgl. 1.4.3).

Die diesen Aufgaben zugrunde liegenden Anforderungen sind also sehr heterogen. Dass Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Aufgabentypen nach Stern (1994b) bestehen, belegen Befunde von Ricken (2003b). Die Reliabilitäten der Textaufgaben nach Populationsanteilen von Kindern aus dem Schulkindergarten, Erstklässlern und zwei Lernbehindertenklassen unterschiedlich zwischen .75 und .87 erlauben eine Überprüfung der angenommenen qualitativ unterschiedlichen Entwicklungsphasen (vgl. ebd., 356ff.): In einer vierfaktoriellen Lösung bilden die Vergleichsaufgaben eindeutig den Faktor 1, unabhängig von den jeweiligen Vergleichsaufgaben-Untertypen. Dagegen verteilen sich die Austauschaufgaben über drei Faktoren: Zusammen mit Kombinationsaufgaben mit unbekannter Gesamtmenge bilden die Austauschaufgaben mit unbekannter Endmenge Faktor 2, die Austauschaufgaben mit unbekannter Austauschmenge bilden Faktor 3 und die mit unbekannter Startmenge Faktor 4. Ohne auf dieser Datenbasis eine Anforderungshierarchie aufzustellen, kann jedoch grundsätzlich geschlossen werden, dass die unterschiedlichen Aufgabentypen verschiedene Anforderungen repräsentieren, die sich eindeutig voneinander abgrenzen lassen. Insgesamt liegen Textaufgaben, wie unter 2.3.1 ausführlich diskutiert, in Abhängigkeit ihres Typs bereits wesentliche Integrationsleistungen von Zählzahl und Kardinalzahl sowie unterschiedlich entwickelte Teile-Ganzes-Konzepte zugrunde. Das bedeutet, dass die Zahlworte hier mit Mengenvorstellungen zu einem elaborierteren Zahlbegriff integriert sein müssen, so dass die Lösung der Textaufgaben eine entwickelte, zum Teil kulturell vermittelte Kompetenz abbildet. Der niedrige Reliabilitätskoeffzient der Textaufgaben von .22 (von Aster 2002, 31) wird mit der geringen Anzahl der Items des Subtests erklärt.

Die Aufgaben „Zahlenlesen“ und „Zahlenschreiben“ schließlich beruhen beide jeweils auf auditiv-sprachlicher und visuell-arabischer Repräsentation. Zwischen diesen beiden Subtests und dem Faktor 1 bestehen besonders große Zusammenhänge: Deren Faktorladungen 0.842 bzw. 0.854 belegen, dass „Zahlenschreiben“ und „Zahlenlesen“

mit besonderem Gewicht am Index „kulturvermitteltes Zahlenwissen“ beteiligt sind. Dies ist insofern plausibel, als dass Zahlworte und Ziffern kulturbasiert sind. Die entsprechenden Module können sich erst während entsprechender Lernprozesse nach Sprachbeginn ausbilden. Hier werden die Aufgaben Faktor 1 zugeordnet, weil beide Module involviert sind und entsprechende Transkodierungsprozesse zwischen den Modulen ablaufen.

Faktor 2 „Rechnen“ bilden das Rückwärtszählen und die Kopfrechenaufgaben. Diese werden ausschließlich dem zahlwortbezogenen, auditiv-sprachlichen Modul zugeordnet (vgl. Tab. 2.4). Das mündliche Rückwärtszählen kann auf dem restringierten Niveau einer automatisierten, unflexiblen Wortsequenz ausschließlich auf Leistungen des verbalen Gedächtnisses zurückzuführen sein.

Nach von Aster (1996, 187) sind Schwierigkeiten bei der Lösung von Kopfrechenaufgaben auf Beeinträchtigungen der Entwicklung von Zählfertigkeiten zurückzuführen, bedingt durch Störungen auf sprachlicher Ebene. Wie bereits oben dargestellt, liegen der Lösung von Additions-, Subtraktions- oder Zerlegungsaufgaben jedoch nicht ausschließlich Leistungen des verbalen Gedächtnisses zugrunde: Können die Kopfrechenaufgaben nicht als gespeicherte Rechenfakten abgerufen werden, können sehr unterschiedliche Prozesse zur Lösung benutzt werden (vgl. 1.4.3.2): Additionsaufgaben können durch Modellieren und anschließendes (auszählendes) Vorwärtszählen gelöst werden. Subtraktionsaufgaben erfordern das komplexere Vorgehen nach der separate-from-Strategie (vgl. Fuson 1988, 261), bei der die Ausgangsmenge in die bekannte und in die unbekannte Teilmenge separiert wird und nach Abzug der bekannten Teilmenge die verbleibenden Elemente ausgezählt werden. Wird die Lösung zählend ermittelt, sind „keeping track“-Prozesse notwendig (vgl. Fuson 1988, 55; 1992a, 99; 1992b, 142), wobei das Zählen durch auditorische Muster sowie durch ‚doppeltes’ Zählen: 4+6: 4 – 5(1), 6(2), 7(3), 8 (4), 9 (5), 10(6) überwacht und kontrolliert wird. Ein solches Vorwärts- oder Rückwärtszählen *um* eine bestimmte Anzahl erfordert bereits einen relationalen Zahlbegriff und geht über abgespeicherte verbale Zahlformate hinaus.

Daher können auch hier u.U. komplexe, Zähl- und Mengenkonzepte integrierende Prozesse verdeckt werden. So warnen Gerster & Schultz (2000, 229): „Wenn man den Erwerb der Basisfakten nur als verbale Assoziationen begreift, kann es bezüglich der Entwicklungshindernisse zu Fehleinschätzungen kommen.“ Dass Zerlegungsaufgaben mit Schulbeginn möglich werden, „weil Teilaspekte schon aus dem Gedächtnis verfügbar sind“ (von Aster 1996, 19), kann daher so nicht pauschal angenommen werden.

Schwierigkeiten können auch bei sprachlich unbeeinträchtigten Zählfertigkeiten auftreten, wenn beispielsweise kein Operationsverständnis vorhanden ist oder wenn die Zählfertigkeiten noch nicht elaboriert genug sind. Diese vielfältigen Prozesse und Aspekte könnten daher als Ursache für den relativ niedrigen Reliabilitätskoeffizienten der Kopfrechenaufgaben von .60 in Betracht gezogen werden.

Der **dritte Faktor** erfasst die Subtests „Anordnen auf einem Zahlenstrahl" und „Perzeptive Mengenbeurteilung", welche „über die visuelle Aufnahme analoge Repräsentationen für Zahlen in konkreter und abstrakter Form" ansteuern (von Aster 2002, 33). Daher wird daraus der Index **„Visuell-analoge Zahlenrepräsentanz"** gebildet. Die Zahlenstrahlaufgabe lässt sich dem visuell-arabischen und dem analog-semantischen Modul und die Aufgabe zur perzeptiven Mengenbeurteilung dem auditiv-sprachlichen und dem analog-semantischen Modul zuordnen (vgl. Tab. 2.4). Die *Interpretation* von richtig gelösten Zahlenstrahlaufgaben zur Prüfung des analogen Zahlverständnisses durch Zuordnung von Zahlen zu alternativen markierten Positionen auf einem vorgegebenen Zahlenstrahl mit Orientierungszahlen und deren Zuordnung auch zum analog-semantischen Modul sind allerdings nicht unproblematisch.

Um die unterschiedlichen Anforderungen zu verdeutlichen, wird zur Illustration auf das in 1.4.3.2 dargestellte Entwicklungsmodell zurückgegriffen. Auch wenn dieses Modell nicht von Asters Testkonzeption zugrunde liegt, kann es an dieser Stelle doch einer Systematisierung der einzelnen Anforderungen und deren Einordnung dienen: Bereits auf Stufe 2 entwickeln sich erste mentale Zahlenstrahlvorstellungen durch die Verbindung des protoquantitativen Vergleichsschemas mit der Zahlwortsequenz. Dadurch wird die lineare Ordnung der Zahlreihe verstanden. Über das Merkmal ‚Reihenfolge' verfügt das Kind über ein erstes Verständnis sequenzieller Relationen (davor/danach und größer/kleiner), jedoch noch *nicht* kardinaler Relationen ((1) mehr / (1) weniger). Deren Verständnis kommt erst später hinzu. Die Anordnung von Ziffern in ihrer korrekten Reihenfolge kann also auch schlicht auf der Grundlage der automatisierten Zahlwortsequenz erfolgen, ohne dass das Kind schon auf eine mentale Zahlenstrahlkonstruktion zurückgreifen kann, auf der die Mächtigkeiten von Mengen verortet sind. Eine richtige Bearbeitung dieser Aufgaben zeigt also nicht, ob die Lösung auf diesen wenig elaborierten Einsichten der Stufe 2 beruhen, oder ob das Kind bereits über komplexere Vorstellungen sowohl sequenzieller als auch kardinaler Relationen verfügt. Diese Problematik könnte u.U. die niedrige Reliabilität von .48 erklären, da möglicherweise mit dieser Aufgabe bei den Kindern jeweils unterschiedliche Merkmale gemessen worden sind.

Den **vierten Faktor** bildet allein die Aufgabe „Abzählen“, welche nach der Tabelle 2.4 auf alle drei modularen Repräsentationen zurückgreift. In diesen Aufgabenstellungen müssen Punktmengen ausgezählt werden. Dies ist eine wenig komplexe Anforderung, da das Zählen im Gegensatz zum später verfügbaren *Ab*zählen hier das kardinal noch unvollständige *Aus*zählen darstellt. Dabei wird eine vorgegebene Menge vollständig gezählt, indem jedem Element ein Zahlwort zugeordnet wird. Diese Auszählprozesse erfordern „count-to-cardinal transitions“, nicht jedoch schon „cardinal-to-count transitions“. Entsprechend wurde diese Aufgabe von fast allen Kindern der Eichstichprobe richtig gelöst (vgl. von Aster 2002, 33). Die Bewältigung dieser Aufgabe ist Voraussetzung für die Bewältigung der übrigen Aufgaben bzw. geht in jedem Fall entwicklungspsychologisch betrachtet der Bewältigung der anderen Anforderungen voraus.

Bezogen auf die Befunde der Personenclusteranalyse, die drei Subtypen von Rechenschwäche unterscheiden lässt, können folgende Faktorprofile erwartet werden (vgl. dazu ebd., 34): „Bei Kindern mit dem ‚tiefgreifenden’ Subtyp sind Minderleistungen in allen drei Faktorindizes zu erwarten“; Kinder des sprachlichen Subtyps müssten aufgrund der in Bereichen der Sprachentwicklung, der Aufmerksamkeit oder des Arbeitsgedächtnisses vermuteten Störungen Schwächen in den aus Faktor 2 und 4 gebildeten Indizes und Kinder des arabischen Typs müssten aufgrund ihrer Schwierigkeiten beim Transkodieren und Zahlenvergleichen in dem aus Faktor 1 gebildeten Index Schwächen aufweisen.

Die Subtypenbildung von von Aster (1996; 2002; 2003) ermöglicht eine grobe Orientierung über den Bereich der Schwierigkeiten eines Kindes. Dem auditiv-sprachlichen und dem visuell-arabischen Modul zuzuordnende Probleme lassen sich offenbar recht gut mit den Subtypen ‚sprachlich’ und ‚arabisch’ systematisieren. Allerdings erscheint die Bezeichnung ‚arabisch’ für Schwierigkeiten bei Transkodierungsaufgaben und bei Aufgaben, die einen Zahl- und Mengenkonzept integrierenden Zahlbegriff voraussetzen, ungünstig. Beispielsweise werden die unter Faktor 1 fallenden Textaufgaben den Modulen ‚auditiv-sprachlich’ und ‚analog-semantisch’ zugeordnet, nicht jedoch dem visuell-arabischen (vgl. Tab. 2.4). Insgesamt erscheint der aus Faktor 1 gebildete Index als sehr komplex. Die Schwierigkeiten eines Kindes dieses Subtyps scheinen nicht angemessen ausschließlich mit Schwierigkeiten des visuell-arabischen Moduls erklärbar zu sein. Ebenso bleibt bei der Erfassung der Schwierigkeiten der Kinder, die dem tiefgreifenden Subtyp zugeordnet werden, deren vorsprachliche numerische Kompetenzen nicht ausreichend entwickelt sind (vgl. von Aster 2003, 173), offen, welche Fertigkeitsbereiche genau betroffen sind: Die präverbale pränumerische Entwicklung ist äußerst komplex und umfasst sowohl sequenzielles als auch analoges Wissen. Entwicklungsbeeinträchtigungen können sich damit sowohl auf mengenbezogene Konzepte als auch auf sequenzielle Grundlagen der Zählfertigkeiten beziehen.

Insgesamt erscheint die Systematik unterschiedlicher mentaler Zahlrepräsentationen sinnvoll, da sie „neuropsychologisch und entwicklungspsychologisch gerechtfertigt“ ist und Strukturierungshilfen „für die Untersuchung von Rechenschwierigkeiten hinsichtlich der Zahlverarbeitung und des Zahlverständnisses“ anbietet (Gerster & Schultz 2000, 228). Das ‚Triple Code Model’ macht deutlich, dass Bedingungen der Sprach- oder Symbolverarbeitung die mathematische Leistung beeinflussen. Auch werden darüber asemantische von semantischen Fehlleistungen unterscheidbar (vgl. von Aster 1996, 10). Zu asemantischen Leistungen zählen Prozesse der Zahlverarbeitung wie das Bilden korrekter Zahlwortsequenzen und Übersetzungen zwischen Wort- und Symbolformaten, die unabhängig von quantitativen Zahlbedeutungen sind. Problematisch ist die Operationalisierung des analog-semantischen Moduls in Form eines mentalen Zahlenstrahls, auf dem die quantitative Gestalt einer Zahl als analoger Ort verortet ist. Dies wird nachfolgend in der abschließenden Diskussion erörtert:

Die Faktoren scheinen nicht die Module zu belegen; mit der Faktorenanalyse werden nicht drei unabhängige Faktoren gebildet, die eindeutig den Modulen zuzuordnen wären. Die Testaufgaben sind damit bis zum Teil auf die Faktor 2 zugeordneten Aufgaben nicht modulspezifisch. Die intendierte Prüfung der modulspezifischen Zahlaspekte in separaten Aufgabengruppen ist also nicht unproblematisch: Leistungsausfälle in den Aufgabenbereichen lassen sich nur teilweise auf ein spezifisches Verarbeitungsmodul zurückführen, einige Anforderungen erfordern sowohl sprachlich-alphabetisch als auch visuell-arabisch oder analog-semantisch basierte Verarbeitungsprozesse bzw. Kodierungsformen.

Zudem lassen sich dem analog-semantischen Modul zahlreiche unterschiedliche Kompetenzen zuordnen: Die zunächst getrennt verlaufende Entwicklung von protoquantitativen Schemata und Zählschema und deren spätere Integration zum mentalen Zahlenstrahl und schließlich zum Erwerb der vollständigen Kardinalität ist im analog-semantischen Modul bereits zusammengefasst, da dort die quantitative Gestalt einer Zahl als analoger Ort auf einem mentalen, ordinal interpretierten Zahlenstrahl repräsentiert wird. Die langwierige und komplexe Integration räumlich-analoger und verbal-sequenzieller Zahlaspekte ist also bereits vollzogen, so dass Stationen der Entwicklung von Zahl- und Rechenverständnis auf der Grundlage von Zahlbedeutungen und -beziehungen schon zusammengefasst sind. Damit stellt der analog-semantische

Modul nach Dehaene (1992) eine zu grobe Kategorie dar. Zum einen müssten daher Aufgaben, die diesen Bereich prüfen, entsprechend differenzierter sein. Zum anderen ist eine präzise kodierungsspezifische Trennung innerhalb dieser Aufgaben schwierig (beispielsweise müssen bei der Aufgabe zu kognitiver Mengenbeurteilung „12 Zuschauer in einem Fußballstadion", bei der das Kind eine Einschätzung nach ‚wenig', ‚mittel' oder ‚viel' vornehmen soll, analoge Mengenvorstellungen bereits mit sequenziellen Zahlwortaspekten integriert sein). Darüber hinaus existieren vermutlich in Abhängigkeit von u.a. Entwicklungsstand und Unterrichtserfahrung verschiedene analoge Repräsentationsformate (vgl. Gerster & Schultz 2000, 229). Zudem erfordert entwickelte mathematische Kompetenz und Einsicht eine Integration übergeordneter Gliederungen wie der Klassenbildung von Einern, Zehnern, Hundertern etc. mit der Syntax der Ziffern, so dass der analog-semantische Modul allein nicht als Ort des eigentlichen Zahlverständnisses gelten kann (vgl. ebd.).

Der Modulansatz bietet damit eine zweifelsfrei hochinteressante Systematik an. Fragen nach der Ausdifferenzierung einzelner Zahlaspekte und nach der Entwicklung von Verständnis und Einsicht in Beziehungen können damit jedoch nicht beantwortet werden.

2.3.3.2 ZAREKI-K

Im Rahmen eines Forschungsprojektes zur Früherkennung von Rechenstörungen wurde auf der Basis der ZAREKI (von Aster 2002) die ZAREKI-K (von Aster et al. 1999) als Kindergartenversion entwickelt. ZAREKI-K erfasst im letzten Jahr vor der Einschulung in neun Kategorien unterschiedene, auf insgesamt 18 Untertests verteilte Fertigkeiten unter Verwendung folgender Aufgaben:

A) Zählen (vorwärts, rückwärts, in Zweierschritten, weiter ab 10 und 17 (fehlt in untenstehender Tabelle 2.6), Vorläufer und Nachfolger, Abzählen [Auszählen; M.G.])
B) Zahlen nachsprechen
C) Addieren / Subtrahieren (mündliches Kopfrechnen im Zahlenraum bis 20)
D) Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl (Zahlenraum bis 10 und bis 20)
E) Perzeptive Mengenverarbeitung (Schätzen, simultane [und quasi-simultane; M.G.] Mengenerfassung; Zahlenerhaltung; Mengenseriation (fehlt in unten stehender Tabelle 2.6); Verändern von Mengen: Mengen durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Elementen gleichmächtig machen)
F) Transkodierung (Zahlenlesen, Zahlen nach Diktat schreiben, Zuordnen von Ziffern (und entsprechendem Zahlwort) zu Mengen)

G) Mengenbeurteilung kognitiv (kontextbezogene Einschätzung von Zahlworten nach ‚viel', ‚mittel', ‚wenig')

H) Textaufgaben (mündlich)

I) Zahlenvergleich (mündlich mit Zahlworten im Zahlenraum bis 20 und bis 100, visuell mit Ziffern im Zahlenraum bis 35)

Im Gegensatz zu ZAREKI beinhaltet ZAREKI-K zusätzlich folgende Aufgaben: Vorwärtszählen, Zählen in Zweierschritten, Vorläufer/Nachfolger bestimmen, Zahlennachsprechen, Verändern von Mengen, simultane [und quasi-simultane; M.G.] Erfassung, Zahlenerhaltung, Symbol-Menge-Zuordnung und Zahlenvergleich auf Zahlwortbasis.

Eine Prüfung der modulspezifischen Zahlaspekte in diesen separaten Aufgabengruppen ist ebenso wie bei ZAREKI nicht unproblematisch, da sich Leistungsausfälle in den Aufgabenbereichen nicht immer auf nur ein spezifisches Verarbeitungsmodul zurückführen lassen.

Zählaufgaben wie z.B. das Vorwärts- oder Rückwärtszählen oder das Nachsprechen von Zahlen können dagegen eindeutig dem auditiv-sprachlichen Modul zugeordnet werden ebenso wie das Herstellen gleichmächtiger Mengen dem analog-semantischen Modul. Die Textaufgaben allerdings erfordern jeweils sehr unterschiedliche Kompetenzen und verschiedene Repräsentationsebenen: Es werden je zwei Kombinations- und Austauschaufgaben mündlich präsentiert (vgl. Weinhold Zulauf et al. 2003, 225) (vgl. zu den Typen 1.4.3.2 und 3.3.4), wovon eine Kombinationsaufgabe eher die Kriterien einer Austauschaufgabe erfüllt (vgl. Anmerkungen bei den Aufgaben). Alle vier Textaufgabentypen sind von über 90% der Kindergartenkinder lösbar (vgl. Fuson 1992a, 64ff.). Allerdings fallen darunter sehr unterschiedliche Aufgaben, so dass eine differenzierte Betrachtung der Lösungen der Textaufgaben sinnvoll ist. Die Textaufgaben 1 und 4 sind durch Vorwärtszählen (count all) lösbar und stellen geringe Anforderungen:

- <u>Aufgabe 1</u>: Der Peter hat 3 Äpfel. Anna gibt Peter 5 Äpfel dazu. Wie viele Äpfel hat Peter jetzt? [Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt]
- <u>Aufgabe 4</u>: Julia hat 2 Möhren. Tobias hat 7 Möhren. Wie viele Möhren haben beide zusammen? [Kombinationsaufgabe, Gesamtmenge unbekannt]

Obwohl Aufgabe 2 dem gleichen Typ wie Aufgabe 1 zuzuordnen ist, erfordert ihre Lösung elaboriertere Kompetenzen und integrierte ordinale und kardinale Einsichten (vgl. die Argumentation in 2.3.1 und 2.3.3.1).

- <u>Aufgabe 2</u>: Laura hat 6 Bananen. Sie gibt Andreas 2 Bananen. Wie viele Bananen hat Laura? [Austauschaufgabe, Endmenge unbekannt]
- <u>Aufgabe 3</u>: Thomas hat 3 Bonbons. Sarah gibt ihm noch welche dazu. Jetzt hat Thomas 10 Bonbons. Wie viele Bonbons hat Sarah ihm gegeben? [Austauschaufgabe, Austauschmenge unbekannt; lösbar von 52% der Erstklässler nach Stern (1994b, 24)]

Die in Aufgabe 3 dargestellte Austauschsituation erfordert eine „add on up to sum“-Strategie (vgl. Fuson 1992a, 65): Dabei muss die Ausgangsmenge ‚3’ gemerkt werden, dann muss von dort solange weitergezählt werden, bis die bekannte Endmenge ‚10’ erreicht ist. Die Anzahl der ausgeführten Zählschritte von 3 bis 10 muss gemerkt worden sein. Diese Aufgabe stellt bereits auf enaktiver Ebene unter Zuhilfenahme konkreter Objekte (3 Objekte werden ausgezählt, dazu werden solange weitere Objekte gelegt, bis insgesamt 10 dort liegen, abschließend werden die hinzugefügten Objekte ausgezählt) große Anforderungen an Kindergarten- und auch an Schulkinder. Auf einer rein verbalen Ebene wie hier präsentiert wird die Aufgabe noch bedeutend schwieriger und stellt hohe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis. Für die Lösung ist ein Verständnis des Summanden in seiner doppelten Funktion als Summand und als Teilmenge der Summe erforderlich. Damit liegen dieser Aufgabe auch bedeutende Integrationsleistungen von Zählzahl und Kardinalzahl zugrunde. Zudem muss der sprachlich-alphabetische Modul beteiligt sein, der für die Verarbeitung der Zahlworte, für den Ablauf der erforderlichen Zählprozeduren und für exaktes Rechnen erforderlich ist, so dass es sich nach dem Triple-Code-Ansatz nicht um eine modulspezifische Aufgabe handeln kann.

Auf die Problematik der Interpretation und Zuordnung der Zahlenstrahlaufgabe wurde oben unter ZAREKI bereits hingewiesen.

Die Spezifität der ZAREKI-K-Aufgaben und die Vorhersagbarkeit modulspezifischer Rechenschwierigkeiten werden in einer laufenden Längsschnittstudie untersucht. Die Auswertung erster Längsschnitt-Daten für das Vorschulalter (vgl. Weinhold Zulauf et al. 2003) zeigt die Verteilung der Testleistungen in nachstehender Tabelle 2.6.

Die Spalte ‚Punktminimum’ zeigt den prozentualen Anteil der Kinder, die keine Punkte und die Spalte ‚Punktmaximum’ den Anteil der Kinder, die alle Punkte einer Aufgabe erreicht haben. Besonders bei den Aufgaben ‚Rückwärtszählen’, ‚Zweierschritte’, ‚Textaufgaben’ und ‚Verändern von Mengen’ wurden häufig keine Punkte erreicht. Diese Aufgaben scheinen jedoch nicht unbedingt für alle Kinder die schwierigsten zu sein, da sich die Werte im Bereich ‚Punktmaximum’ bis auf den Bereich der

Tabelle 2.6: Testleistungen der ZAREKI-K (entnommen aus Weinhold Zulauf et al. 2003, 226)

Untertest	Score Range (min/max.)	Mittelwert (sd)	Punktminimum (%)	Punktmaximum (%)
Vorwärtszählen	0–4	3.32 (0.89)	2.1	54.5
Rückwärtszählen	0–5	3.36 (2.13)	17.4	27.8
Zweierschritte	0–8	4.76 (3.11)	15.6	34.1
Vorläufer/Nachfolger	0–8	5.42 (2.13)	0.9	21
Abzählen	0–8	6.87 (1.10)	0.3	31.4
Textaufgaben	0–12	4.84 (3.19)	10.5	2.7
Zahlennachsprechen	0–12	5.70 (1.95)	0.6	0.2
Verändern von Mengen	0–6	4.01 (2.03)	10.2	34.7
Addieren	0–12	7.40 (3.83)	3.6	21.6
Subtrahieren	0–12	4.97 (3.50)	7.5	6.3
Zahlenstrahl	0–10	4.94 (2.17)	2.4	2.1
Schätzen + Simultanerfassung	0–7	5.60 (1.27)	0.3	26.6
Zahlenerhaltung	0–8	3.81 (2.03)	8.1	5.7
Zahlenlesen	0–9	5.54 (3.05)	2.7	32.9
Zahlenschreiben	0–23	12.68 (7.60)	6.9	11.4
Symbol-Mengen-Zuordnung	0–4	3.47 (0.87)	1.2	65.6
Mengenbeurteilung kognitiv	0–6	4.60 (1.14)	0.3	23.4
Zahlenvergleich	0–18	13.69 (2.95)	0.3	10.2
Total	max. 172	104.98		

Textaufgaben nicht mit dieser Tendenz decken: Besonders selten wurde die maximale Punktzahl bei den Aufgaben ‚Textaufgaben', ‚Zahlennachsprechen', ‚Subtrahieren', ‚Zahlenstrahl' und ‚Zahlenerhaltung' erreicht. Beides zusammen zeigt, dass Leistungsausfälle im Vorschulalter nicht auf ein spezifisches Verarbeitungsmodul zurückzuführen sind, da sich die Fertigkeiten unterschiedlich dem auditiv-sprachlichen Modul (z.B. Zahlennachsprechen), dem visuell-arabischen Modul (z.B. Zahlenvergleich mit Ziffern) und dem analog-semantischen Modul (z.B. Verändern von Mengen) zuordnen lassen oder mehrere Module involviert sind (z.B. Textaufgaben).

Ein ähnliches Bild ergibt sich, wenn man die besonders leichten Aufgaben betrachtet: Nur weniger als 1% der Kinder lösten folgende Aufgaben nicht: ‚Vorläufer / Nachfolger', ‚Abzählen', ‚Zahlennachsprechen', ‚Schätzen und Simultanerfassung', ‚Mengenbeurteilung kognitiv' und ‚Zahlenvergleich'. Die meisten dieser Fertigkeiten lassen sich dem sprachlich-alphabetischen Modul zuordnen, mengenbezogene und ziffernbezogene Repräsentationsebenen sind jedoch auch vertreten und zum Teil kombiniert beteiligt (‚Schätzen und Simultanerfassung', ‚Mengenbeurteilung kognitiv'; ‚Vorläufer / Nachfolger', ‚Zahlenvergleich').

Im Vorschulalter scheinen daher schwache Leistungen breit und unspezifisch vorhanden zu sein, so dass bis zum Abschluss der Längsschnittstudie abzuwarten bleibt, ob mit ZAREKI-K Aussagen zu modulspezifischen Rechenschwierigkeiten getroffen werden können (vgl. Fritz & Ricken 2005, 9). Unabhängig davon ist anzunehmen, dass sich die sprachlich-alphabetischen und visuell-arabischen Bereiche mit den Aufgaben prüfen lassen; auf gewisse Schwierigkeiten wurde im Rahmen der Diskussion von ZAREKI in 2.3.3.1 hingewiesen. Die vielfältigen Teilfertigkeiten und komplexen Integrationsprozesse insbesondere innerhalb des analog-semantischen Moduls können hier aus den gleichen Gründen wie bei ZAREKI nicht differenziert erfasst werden.

2.3.4 Heidelberger Rechentest (HRT 1-4)

Der Heidelberger Rechentest (HRT 1-4) von Haffner et al. (2005a) soll mathematische Basiskompetenzen ab Ende der ersten Klasse bis zum Ende der Grundschulzeit erfassen und differenziert im gesamten Leistungsspektrum (vgl. Haffner et al. 2005b, 129).

Die Normierungsstichprobe umfasste 3354 Kinder von Grund-, Sprachheil- und Förderschulen des ersten bis vierten Schuljahres aus 4 deutschen Bundesländern. Für die Auswertung stehen für jedes Quartal der Schuljahre Normen zur Verfügung. Daraus können T-Werte und Prozentrangwerte eines Kindes ermittelt werden. Liegt der Prozentrangwert für die erste Skala (s.u.) oder für die Gesamtwertskala bei ≤ 10 und der IQ-Wert mehr als 12 T-Wertpunkte darüber, wird auf eine Rechenschwäche geschlossen.

Konzipiert als lösungsorientierter Speed-Test mit einer zeitlichen Dauer von 50 bis 60 Minuten kann der HRT 1-4 sowohl als Einzel- als auch als Gruppentest eingesetzt werden. In 12 Subtests werden Schnelligkeit und Sicherheit beim Größen- und Mengenerfassen, bei grundlegenden Rechenoperationen, Gleichungen und Ungleichungen sowie von logischen und räumlich-visuellen Leistungen geprüft. Ausgehend von der Annahme, Kinder mit umständlichen oder unsicheren Strategien lösten weniger Aufgaben als kompetente und geübte Rechner, wird hier also die Anzahl gelöster Aufgaben eines Subtests als Indikator für die jeweils gemessene Fähigkeit verwendet (vgl. ebd.). „Aufgaben und Bearbeitungszeiten sind für alle Klassenstufen identisch“, wobei in jedem Untertest Aufgaben mit stetig ansteigender Schwierigkeit zu bearbeiten sind (ebd., 129f.).

Da Aufgaben ausgewählt werden sollten, die kulturübergreifend als grundlegend für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen gelten können, ist der HRT 1-4 als weitgehend sprachfreies Verfahren konzipiert. Im Gegensatz zu dem nachfolgend in 2.3.5 vorgestellten curricular validen DEMAT 1+ prüft der HRT 1-4 lehrplanunabhängig als basal erachtete mathematische und kognitive Kompetenzen. Um diese festzulegen, wurde zunächst zwischen primären, basalen quantitativen Fähigkeiten, die sich unabhängig von schulischer Vermittlung entwickeln und sekundären, schulisch vermittelten Fähigkeiten unterschieden (vgl. ebd., 126).

Theoretisch gestützt u.a. auf Geary (2000) nehmen die Testautoren an, dass Abzählen, Schätzen von Größen- und Anzahlrelationen, arithmetische Operationen im Bereich von 3 bis 4 Objekten zu den angeborenen vorschulischen Kompetenzen zählen. Die Testautoren beziehen sich darüber hinaus insbesondere auf Dehaenes (1992) Triple Code Model. Welche Schlussfolgerungen aus dieser theoretischen Grundlegung für die Konstruktion der Testaufgaben gezogen werden, bleibt jedoch unklar.

Unter Bezug auf die ICD-10-Klassifikation umschriebener Rechenstörungen werden u.a. folgende Aspekte aufgezählt, die typischerweise beeinträchtigt sind und die sich vor allem auf die vier Grundrechenarten beziehen (vgl. Haffner et al. 2005b, 128): Verständnis der den Rechenoperationen zugrunde liegenden Konzepte, Verständnis mathematischer Ausdrücke, Verständnis und Erkennen mathematischer Zeichen, Rechenfertigkeit, Erkennen problemrelevanter Zahlen, Zahlseriation, Einsetzen von Dezimalstellen oder Symbolen während des Rechens, räumlicher Aufbau von Berechnungen und Lernen des Einmaleins. Neben der Relevanz der vier Grundrechenarten wird von den Testautoren unter Bezug auf Lorenz & Radatz (1993) auch eine besondere Bedeutung räumlich-visueller Fähigkeiten für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen angenommen (vgl. Haffner et al. 2005a, 11; 2005b, 127). Diese Annahmen führen zu zwei inhaltlichen Schwerpunkten: Darunter werden zum einen die grundlegenden Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation (ab Ende Klasse 2) und Division (ab Ende Klasse 2) und zum anderen logische Zahlverarbeitung, Mengenerfassung und räumlich-visuelle Fähigkeiten zusammengefasst.

Im Einzelnen besteht der HRT aus folgenden Subtests (Schreibgeschwindigkeit wird als Kontrollvariable erhoben) (vgl. Haffner et al. 2005b, 130):

1. <u>Schreibgeschwindigkeit</u> (visuomotorisches Arbeitstempo) (Ziffern abschreiben)
2. <u>Addition</u> (Formen: z.B. 3 + 1 =; 12 + 3 =; 6 + 16 =; 38 + 15 =; 160 + 213 =)
3. <u>Subtraktion</u> (Formen: z.B. 3 – 1 =; 12 – 4 =; 33 – 11 =; 120 – 22 =; 631 – 458 =)
4. <u>Multiplikation</u> (Formen: z.B. 3 · 3 =; 11 · 2 =; 9 · 18 =; 17 · 17 =)
5. <u>Division</u> (Formen: z.B. 9 : 3 =; 20 : 4 =; 120 : 8 =; 450 : 15 =)
6. <u>Ergänzungsaufgaben</u> (Rechenleistung bei variablen Gleichungsaufgaben) (ein- und zweistellige Zahlen; Formen: z.B. 3 + _ = 5; 5 – _ = 4; _ + 5 = 10 – 1; 6 = _ + 3)
7. <u>Größer-Kleiner-Aufgaben</u> (Größenvergleiche, Überblicksrechnen, Ungleichungen) (ein- bis vierstellige Zahlen; Formen: z.B. 6 _ 5; 3 _ 81; 5 – 1 _ 4; 70 + 5 _ 16)

8. Zahlenfolgen (logisches Denken, Regeln erkennen): „Wie geht die Reihe weiter?“
9. Längenschätzen (visuelle Größenerfassung): Vorgabe von Ausgangslängen (Linien aus 1, 5 und 10 Schritten), davon ausgehend sollen die Längen von Linien und Wegen geschätzt werden
10. Würfelzählen (Mengenerfassung unter Berücksichtigung räumlicher Vorstellung): Vorgabe visueller Würfelgebäude, „Wie viele Würfel braucht man, um die Figur zu bauen?“
11. Mengenzählen (Zählgeschwindigkeit, Mengenstrukturierung): Vorgabe visueller Mengendarstellungen in wechselnden Reihen- und Feldanordnungen
12. Zahlenverbinden (Wahrnehmungsgeschwindigkeit, Visuomotorik): Vorgabe von Feldern mit ungeordneten Ziffern von 1 bis 20, „Verbinde die Zahlen in der richtigen Reihenfolge, so schnell wie möglich, ohne anzuhalten und ohne den Stift abzusetzen.“

Es werden drei Skalenwerte gebildet:

1. Rechenoperationen
2. räumlich-visuelle Funktionen
3. Gesamtleistung aller Subtests

Diese Skalenbildung erfolgte nach inhaltlichen Gesichtspunkten und wurde empirisch anhand einer Hauptkomponentenanalyse begründet. Danach werden die Grundrechenarten zusammen mit Gleichungs- und Ungleichungsaufgaben in der Skala ‚Rechenoperationen’ und die übrigen Aufgaben in der Skala ‚räumlich-visuelle Funktionen’ zusammengefasst. Lediglich der Subtest ‚Zahlenfolgen’ lädt auf beiden Komponenten etwa gleich hoch, wird jedoch der zweiten Skala zugeschlagen.

Die Aufgaben insbesondere der Skala ‚Rechenoperationen’ prüfen mit den Aufgaben zu den Grundrechenarten, Ungleichungen und Ergänzungsaufgaben weitgehend schulisch vermittelte Fertigkeiten auf Ziffernebene. Der HRT 1-4 prüft somit vorwiegend sekundäre, schulisch vermittelte Fertigkeiten und Kompetenzen. Frühester Einsatz des HRT ist daher am Ende des ersten Schuljahres. Unterschiedliche Testergebnisse eines Kindes im HRT 1-4 und im DEMAT werden folgendermaßen erklärt (vgl. Haffner et al. 2005a, 31f.): Bei schlechteren Ergebnissen im DEMAT fehlen dem Kind schulische Wissensinhalte und bei besseren DEMAT-Ergebnissen wird eine Kompensation der schwächeren Voraussetzungen durch Übung und positives Lernverhalten angenommen.

Die Skala ‚räumlich-visuelle Funktionen’ (Subtests 8. bis 12.) soll neben der Fähigkeit zu logischer Zahlenverarbeitung und Mengenerfassung räumlich-visuelle Fähigkeiten abbilden (vgl. Haffner et al. 2005b, 129). Aufbau und Auswahl der entsprechenden Subtests erscheinen plausibel und mit .70 bis .82 ausreichend reliabel. Diagnostik visuellen Wahrnehmens und Vorstellens im Sinne von Lorenz & Radatz (1993, 104ff.) bezieht sich hauptsächlich auf geometrische Aspekte wie beispielsweise visuelles Differenzieren einer Form innerhalb vieler Linien auf einem Blatt, Speichern visueller Informationen beim Heraussuchen einer gemerkten Form aus mehreren ähnlichen Formen, geometrische Folgen fortsetzen, (Ab-)Zeichnen geometrischer Figuren oder Zusammensetzen zerschnittener Figuren. In dieser Form können visuell-räumliche Fähigkeiten also auf allgemein kognitive Funktionen bezogen sein. Die Subtests der Skala ‚räumlich-visuelle Funktionen' beinhalten dagegen immer auch mathematische Anforderungen. Damit werden visuell-räumliche Funktionen mathematisch spezifiziert. Würde man ausschließlich allgemein kognitive räumlich-visuelle Funktionen überprüfen wollen, wären dazu andere Aufgaben notwendig. Beim Subtest ‚Würfelzählen' müssen sichtbare Elemente eines Würfelgebäudes aufgrund der sichtbaren bestimmt werden und beim Subtest ‚Längenschätzen' müssen Strecken und Wege aufgrund vorgegebener Längeneinheiten geschätzt werden. Der HRT 1-4 erfasst damit wesentlich komplexere und für die Erfassung zahlbegriffrelevanter Aspekte offensichtlich geeignete Fähigkeiten.

Inhaltliche Validität besteht für die Aufgaben zur Beherrschung der Grundrechenarten. Die Kriteriumsvalidität wurde durch Korrelation des Gesamttestwertes mit der jeweiligen Mathematiknote (–.67) und durch Korrelation mit dem DEMAT 4 (.72) erhoben. Die Retest-Reliabilitätswerte der Subtests bewegen sich zwischen .69 (11. Mengenzählen) und .89 (5. Division). Die der drei Skalenwerte liegen für ‚Rechenoperationen' (Subtests 2. bis 7.) bei .93, für ‚räumlich-visuelle Funktionen' (Subtests 8. bis 12.) bei .87 und für die ‚Gesamtleistung' (ohne Subtest 1) bei .93. Die Subtests aus Skala 1 lassen sich curricular relativ eindeutig in eine hierarchische Abfolge bringen; so bauen Multiplikation und Division auf Addition und Subtraktion auf. Ob und wie die Subtests aus Skala 2 miteinander in Beziehung stehen und gemeinsame Anteile haben, bleibt unklar.

2.3.5 Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+)

Nach der Durchführung der Langzeitstudie zur frühen Vorhersage von Rechenleistungen im Vorschulalter (vgl. Krajewski 2003; vgl. 2.3.1) wurden am gleichen Standort DEMAT 1+ und DEMAT 2+ der Reihe „Deutsche Mathematiktests (DEMAT)“ für die Klassen 1 bis 6 entwickelt. Hier soll der DEMAT 1+ (Krajewski et al. 2002) als Test für das Ende des ersten oder für den Beginn des zweiten Schuljahres vorgestellt werden (vgl. ebd.; Schneider & Krajewski 2005).

Der DEMAT 1+ basiert auf den Lehrplaninhalten sämtlicher Bundesländer und dient sowohl der Erfassung des allgemeinen mathematischen Leistungsstands als auch einer quantitativen Diagnostik von Dyskalkulie im Sinne der ICD-10 (vgl. Dilling et al. 1993). Der DEMAT 1+ lässt sich sowohl als Gruppen- als auch als Einzeltest einsetzen. Konzipiert als Speed-Test mit Zeitvorgaben für die Subtests kann der Zeitbedarf mit maximal einer Schulstunde veranschlagt werden. Der Test liegt in den Pseudo-Parallelformen A und B vor, die sich in der Reihenfolge der Testaufgaben unterscheiden. Die Normierungsstichprobe umfasste 1354 Kinder am Ende des ersten und 1582 Kinder am Anfang des zweiten Schuljahres aus insgesamt 12 deutschen Bundesländern. Es werden Normtabellen für den Testgesamtwert und für die einzelnen Subtestwerte angeboten. Die daraus ermittelten Prozentrangwerte eines Kindes lassen sich nach Klassenstufe und nach Geschlecht interpretieren.

Die Reliabilität des DEMAT 1+ beträgt .89, die Retest-Reliabilität .65. Auf die internen Konsistenzen für die einzelnen Subtests wird unten gesondert eingegangen. Zur Validierung des Verfahrens wurden unterschiedliche Kriterien herangezogen: Die Lehrplanvalidität ist gegeben, da der DEMAT 1+ auf der Grundlage sämtlicher Mathematiklehrpläne konstruiert worden ist. Die Kriteriumsvalidität wird mithilfe des DBZ 1, des Lehrerurteils und eines informellen Tests zur Schnelligkeit beim Kopfrechnen (vgl. Krajewski 2003) erhoben: Bezüglich des DBZ 1 ergaben sich Korrelationen von .77, bezüglich des Lehrerurteils von .66 und bezüglich des informellen Tests von .57. Im Gegensatz zu den DEMAT 2+ bis 4 ist die prognostische Validität des DEMAT 1+ relativ niedrig; lediglich schwache DEMAT 2+-Leistungen lassen sich noch gut mit DEMAT 1+ vorhersagen (vgl. Hasselhorn et al. 2005, 195f.).

Die lehrplanbezogene Aufgabenzusammenstellung erfolgte auf der theoretischen Basis von Aeblis (1976) Modell zu Aufbau und Verinnerlichung mathematischer Operationen. Die Autoren interpretieren das Modell folgendermaßen (vgl. dazu die Diskussion zur unterrichtspraktischen Rezeption und damit verbundenen Problemen in 1.5.1 und 1.5.2):

> „Diesem Modell zufolge müssen vier Phasen durchlaufen werden, bis ein Kind mathematische Operationen kompetent durchführen kann. In der ersten Phase werden Rechenoperationen *konkret-anschaulich* mit realen Gegenständen vollzogen. Im nächsten Schritt wird die Handlung *bildhaft* dargestellt, was dazu führt, dass man sich zuvor tatsächlich vollzogene Rechenschritte nun bildlich vorstellen kann. Wenn diese ikonische Repräsentationsmöglichkeit gegeben ist, kann dann in Phase 3 weiter abstrahiert werden. An Stelle der Bilder tritt nun die *symbolische Darstellung in Ziffern*. In einem letzten Schritt wird die *Automatisierung im Zeichenbereich* möglich." (Schneider & Krajewski 2005, 156; Hervorh. i. Orig.).

Die Autoren setzen diese Prozesse bzw. Phasen gleich mit „der kognitiven Entwicklung nach Bruner, Olver & Greenfield, 1971“ (enaktiv, ikonisch, symbolisch), wobei der Phase der konkreten Handlung die enaktive Ebene, der Phase der bildlichen Darstellung die ikonische Ebene und der Phase der symbolischen Darstellung in Ziffern die symbolische Ebene entspricht (Krajewski et al. 2002, 9; vgl. 1.5.1). Sie gehen unter Bezug auf ihre Aebli- und Bruner-Rezeption davon aus, dass die Kinder Ende des ersten Schuljahres problemlos mit Ziffern umgehen können müssten und somit Phase 3 – symbolische Darstellung in Ziffern – erreicht haben (vgl. Schneider & Krajewski 2005, 156). Das bedeutet den Autoren zufolge eine vollständige Verinnerlichung der Phasen 1 (konkret-anschaulich) und 2 (bildhaftes Vorstellen der Handlung), wodurch Rückgriffe auf die anschaulichen Darstellungen jederzeit möglich würden. Daher beziehen sich die Testaufgaben auf den rechnerischen Umgang mit Ziffern und sind unterschiedlich entweder Phase 3 oder Phase 4 (Automatisierung im Zeichenbereich) zugeordnet. Lediglich der erste Subtest „Mengen – Zahlen“ operiert noch auf der Ebene von Phase 2 mit bildlichen Darstellungen (vgl. Krajewski et al. 2002, 10).

Neben der Rezeption der Theorien von Aebli und Bruner wurden bei der Test-Konstruktion Sterns Befunde zu Typen von Textaufgaben (vgl. 1.4.3.2 und 3.3.4), Dehaenes neurokognitionspsychologisches Triple Code Model (vgl. 1.4.1 und 2.3.3) sowie Resnicks part-whole schema (vgl. 1.4.1) berücksichtigt.

In neun Subtests bietet der DEMAT 1+ insgesamt 36 zeitlich begrenzte Aufgaben (außer bei Subtest 1) zu folgenden Bereichen:

1. <u>Mengen – Zahlen</u>
2. <u>Zahlenraum</u> (2 Min. 30 Sek.: 1 Minute für horizontalen und jeweils 30 Sekunden für vertikale Zahlenstrahldarstellungen; dieser Subtest entspricht der ZAREKI-Aufgabe ‚Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl: vgl. 2.3.3.1)
3. <u>Addition</u> (zusammen mit 4. insgesamt 3 Min.; Form a+b = _)
4. <u>Subtraktion</u> (Form a–b = _)
5. <u>Zahlenzerlegung – Zahlenergänzung</u> (2 Min.; Formen: a+_=c, _+b=c, c=a+_)
6. <u>Teil-Ganzes</u> (2 Min. 30 Sek.; Formen: a+b = _+d, a+_=c+d, a+b=c+_, a–b=_+d, a–b=c–_): Im Gegensatz zu Subtest 5 stehen hier auf *beiden* Seiten der Gleichung Rechnungen: a+b=c+d.
7. <u>Kettenaufgaben</u> (2 Min.; Formen: a+b+c+d=_ , a–b–c–d=_)
8. <u>Ungleichungen</u> (2 Min.; z.B.: Setze richtig ein < > = bei 16 _ 8+7)

9. Sachaufgaben (jeweils 30 Sek. zum Aufschreiben; mündliche Vorgabe der Aufgabe): In diesem Subtest sollen Aufgaben aller vier Grundtypen ‚Kombination', ‚Angleichung', ‚Austausch' und ‚Vergleich' vertreten sein, um der Klassifikation nach Stern (1994b) zu entsprechen. Der Typ ‚Austauschaufgabe' kommt allerdings nur in der gemeinsam zu rechnenden Beispielaufgabe vor.

Entsprechend dem Triple Code Model werden Test-Aufgaben zu allen drei Modulen angeboten (vgl. Krajewski et al. 2002, 11f.): Dem zahlwortbezogenen, **auditiv-sprachlichen Modul** werden insbesondere die Sachaufgaben zugeordnet, wobei hier auch der visuell-arabische Modul aufgrund der Zifferndarstellung in den Aufgaben involviert ist. Wie bereits in 2.3.3.1 erörtert, erfordert eine erfolgreiche Bearbeitung der Textaufgaben jedoch auch die Beteiligung der analog-semantischen Repräsentation.

Dem **visuell-arabischen Modul** werden insbesondere die Subtests ‚Addition', ‚Subtraktion', ‚Zahlenzerlegung – Zahlenergänzung', ‚Teil-Ganzes' und ‚Kettenaufgaben' zugeordnet. Auch hier muss einschränkend auf die in 1.4.3.2 sowie in 2.3.1 und 2.3.3.1 aufgezeigte Komplexität der Entwicklung von Zahlen- und Mengenwissen sowie besonders auf deren Integration verwiesen werden. So erfordern beispielsweise die Aufgaben der Subtests ‚Zahlenzerlegung – Zahlenergänzung' und ‚Teil-Ganzes' ein numerisches Teile-Ganzes-Verständnis: Dieses erfordert einen Zahlbegriff, bei dem ordinale, kardinale und relationale Aspekte integriert und zu einem vollständig elaborierten Begriff ausgebaut sind. Damit ergibt sich auch hier die Schwierigkeit, Aufgaben präzise *einem* Modul zuordnen zu können.

Dem **analog-semantischen Modul** werden besonders die Subtests ‚Mengen – Zahlen', ‚Zahlenraum' und ‚Ungleichung' zugeordnet. Grundsätzlich muss auch hier der Einwand geltend gemacht werden, dass dieser Modul eine sehr grobe Kategorie darstellt (vgl. 2.3.3.1). Für den Subtest ‚Zahlenraum' kann die Argumentation aus 2.3.3.1 gelten, da diese Aufgabe analog der ZAREKI-Aufgabe ‚Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl' ist. Die Aufgaben des Subtests ‚Mengen – Zahlen' testen sehr unterschiedliche Aspekte: Bei Item 1 und 3 kann eine Lösung durch einfache 1-zu-1-Zuordnungen oder durch Zählen erfolgen. Dies sind unterschiedlich komplexe Leistungen, die auf unterschiedlichem Entwicklungsniveau anzusiedeln sind. Die Zuordnung zu der umfassenden Kategorie ‚analog-semantischer Modul' verdeckt diese differenzierten Entwicklungsaspekte und -niveaus. Item 2 dieses Subtests ist eine durch Invarianzanforderungen angereicherte Zahlvergleichsaufgabe (vgl. Abb. 2.1): Die verschiedenen Punktmengen müssen ausgezählt oder durch 1-zu-1-Zuordnung verglichen werden, um anschließend die größte Anzahl bzw. Menge feststellen zu können. Auch hier kann die Lösung auf unterschiedlichem Niveau erfolgen sowohl ohne Einsicht in kardinale Relationen (1-zu-1-Zuordnung oder: 5 ist kleiner als 6, da 6 beim Aufsagen der Zahlwortreihe nach 5 kommt) als auch auf einem höheren Niveau mit Einsicht in kardinale Relationen (vgl. 1.4.3.2). Die Auswertung dieses Items gibt darüber jedoch keinen Aufschluss.

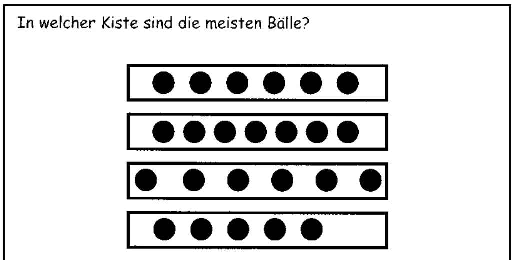


Abbildung 2.1: DEMAT 1+ Item 1.2 (entnommen aus Krajewski et al. 2002, Testheft A)

Interessant ist die Betrachtung der Reliabilitäten für die einzelnen Subtests. Insbesondere in Beziehung gesetzt zu bestimmten Werten der ZAREKI (vgl. 2.3.3.1) ergeben sich bestimmte Parallelen: Relativ niedrige Werte für die interne Konsistenz haben sich für die Subtests ‚Mengen – Zahlen' (.38), ‚Sachaufgaben' (.56) und ‚Ungleichungen' (.58) ergeben (vgl. Krajewski et al. 2002, 28). Der niedrige Wert des Subtests ‚Mengen – Zahlen' wird damit erklärt, dass dessen Aufgaben als für die meisten der Kinder zu lösendes „warming up" zu Beginn der Testdurchführung gedacht sind, so dass sich eine Aufgabenschwierigkeit von .90 ergibt und der Subtest damit kaum noch zwischen den Kindern differenzieren kann (vgl. ebd., 27). Ebenso als Ursache denkbar ist die oben diskutierte Unterschiedlichkeit der Anforderungen.

Der Reliabilitätskoeffzient der Sachaufgaben ist mit .56 zwar deutlich besser als der bei ZAREKI mit .22 (vgl. von Aster 2002, 31). Er ist jedoch auch relativ niedrig, so dass auch hier unter Bezug auf die Argumentation in 2.3.1 und 2.3.3.1 zu Textaufgaben zugrunde liegenden Prozessen und Anforderungen gemutmaßt werden kann, dass das zu messende Merkmal aufgrund der Existenz *mehrerer* Merkmale bzw. komplexer zugrunde liegender Anforderungen nicht präzise zu erfassen ist.

Im Subtest ‚Ungleichungen' sind Zahlvergleiche auf Ziffernebene vorzunehmen, wobei eine Seite der Ungleichungen jeweils aus einer Rechenaufgabe besteht (z.B. 2+6<9). Trotzdem entspricht die Anforderung der des ZAREKI-Subtests ‚Zahlenvergleich (Ziffern)'. Beide haben relativ niedrige Reliabilitätskoeffizienten (DEMAT 1+ .58 und ZAREKI .40).

Ebenso weisen die Zahlenstrahlaufgaben in beiden Tests niedrige Werte für die interne Konsistenz auf: ‚Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl' (ZAREKI) .48 und ‚Zahlenraum' (DEMAT 1+) .63. Entsprechend obiger Argumentation könnte auch hier der Grund dafür das Messen unterschiedlicher Merkmale mit diesen Aufgaben sein.

Da der Genauigkeitsgrad dieser Subtests niedrig ist und die interne Konsistenz weiterer Subtests nur „hinreichend bis gut“ (Schneider & Krajewski 2005, 160) ausfallen, ist die Interpretation der bei der Auswertung zu erstellenden Ergebnisprofile der Kinder problematisch. Allerdings dient diese Profilauswertung ausdrücklich lediglich einer tendenziellen Visualisierung der Kompetenzausprägungen (vgl. Krajewski et al. 2002, 22; Schneider & Krajewski 2005, 160). Trotzdem stellt die Möglichkeit gesonderter Untertestauswertungen im Gegensatz zu Berechnungen eines Testwertes durch Summenbildung über sämtliche Testaufgaben eine gute Möglichkeit differenzierterer Diagnose, da so Stärken und Schwächen eines Kindes durch den Vergleich der Leistungen in den einzelnen Subtests abgebildet werden können. Allerdings fehlen Aussagen über die Beziehungen zwischen den Subtests, so dass beispielsweise unklar bleibt, ob sie aufeinander aufbauen oder ob sie gemeinsame Anteile aufweisen (vgl. Ricken 2003b, 347).

2.3.6 Diskussion und Schlussfolgerungen

Die Darstellung der verschiedenen Mathematiktests hat gezeigt, dass zum einen Forschungsbefunde zu frühen Kompetenzen beachtet werden. Dies zeigt sich zum Beispiel bei Krajewski (vgl. 2.3.1), beim OTZ (vgl. 2.3.2) und zum Teil in der ZAREKI-K (vgl. 2.3.3.2). Damit gibt es Tests, die bereits den Altersbereich ab 4 Jahren abdecken. Die übrigen Tests setzen in höheren Altersbereichen und damit auf höherem Niveau an. Zum anderen hat die obige Darstellung gezeigt, dass insbesondere das neuropsychologische Triple Code Model von Dehaene (1992) großen Einfluss auf Testkonzeptionen hat. Wie an den jeweiligen Stellen ausführlich erörtert, ist es jedoch mit den diskutierten Tests nicht möglich, die drei angenommenen spezifischen Module des Triple Code Models abzubilden. Die Zuordnung der Aufgaben zu den Modulen ist nicht eindeutig und damit diagnostisch wenig hilfreich.

Alle vorgestellten Tests erfassen einzelne Aspekte, die Relevanz für den Erwerb mathematischer Kompetenzen haben. Auswahl und Gewichtung unterscheiden sich jedoch entsprechend dem gewählten Altersbereich und der zugrunde gelegten Theorie. Dabei fanden sich durchgängig eher grobe Kategorisierungen: So finden sich beispielsweise vor allem Kategorisierungen nach den Oberflächenmerkmalen ‚Zählen’ oder ‚Sachaufgaben’. Beide Bereiche umfassen vielfältige Teilfertigkeiten, die sich in ihrer Entwicklungsreihenfolge und Schwierigkeit zum Teil stark unterscheiden. Eine differenzierte Aufschlüsselung oder getrennte Betrachtung dieser Teilfertigkeiten würde eine präzisere Analyse des Entwicklungsstandes und möglicher Beeinträchtigungen erlauben. Bei der Darstellung der Testverfahren besonders in den Blick genommen wurden bei den vorschulischen Aufgaben die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aufgaben und damit zwischen den geprüften Teilfertigkeiten. In den Verfahren werden Teilfertigkeiten einzeln erfasst, ohne feststellen zu können, ob zentrale Integrationsprozesse bereits vollzogen sind. Auch werden Fertigkeiten erfasst, die beispielsweise dem Mengenvorwissen zugeordnet werden, eigentlich aber elaborierte Konzepte darstellen (vgl. z.B. Sachaufgabenbeispiele in 2.3.1). Damit ist es schwierig, festzustellen, ob Teilfertigkeiten unverbunden und parallel oder ob diese in integrierter Form beherrscht werden. Die Frage, was zum Rechnenlernen dazugehört, muss also um die Frage ergänzt werden, wie diese einzelnen Aspekte zusammenhängen. Um diese Zusammenhänge zwischen Leistungen erfassen zu können, wurden bei der Konstruktion der eigenen Lernstandserfassungen entsprechend die in 1.4.3.2 vorgestellten Entwicklungsstationen zugrunde gelegt (vgl. 3.3.1).

An einigen Stellen wurde eine Diskrepanz zwischen Aufgabenkonstruktion und deren Interpretation diskutiert. So wurde gezeigt, dass Aufgaben entgegen ihrer theoretischen Intention statt eines Merkmals mehrere oder andere messen können (vgl. z.B. die Modulzuordnung bei ZAREKI in 2.3.3.1 und bei DEMAT 1+ in 2.3.5). Dies beruht vermutlich darauf, dass auf der einen Seite bei der Konstruktion theoretisch unterstellt wird, dass diese Aufgabe bestimmte Anforderungen erfasst. Auf der anderen Seite kann das gewählte Aufgabenformat aber zum Beispiel auf einer anderen Ebene wenig elaborierter Strategien gelöst werden. So wird eine Aufgabe gelöst, obwohl das Kind vielleicht gar nicht über das zu messende Konzept verfügt. Dies soll an einem Beispiel aus dem DEMAT 1+ illustriert werden (vgl. Krajewski et al. 2002, 14): Die Aufgabe in nebenstehender Abbildung 2.2 ist dem Subtest ‚Mengen – Zahlen' zugeordnet und soll Anzahlerfassung und Zahlverständnis auf der Ebene bildlich dargestellter Mengen prüfen. Eine Lösung kann hier jedoch auch ohne Anzahlerfassung und Zahlverständnis durch einfache 1-zu-1-Zuordnungen gefunden werden. Eine Lösung durch Zählen stellt eine andere, komplexere Lösungsmöglichkeit wieder auf einem anderen Niveau dar.

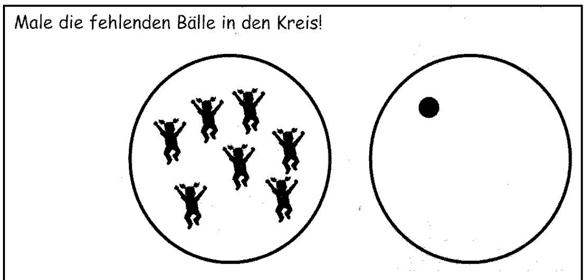


Abbildung 2.2: DEMAT 1+ Item 1.1 (entnommen aus Krajewski et al. 2002, Testheft A)

Dies verdeutlicht, dass genau zu prüfen ist, ob eine theoretisch unterstellte Anforderung mit dem gewählten Format *eindeutig* erfasst werden kann. Kann dies nicht gewährleistet werden, kann als zusätzliche Informationsquelle das strategische Vorgehen erfasst werden. Dazu wiederum sind Einzeltestsituationen erforderlich oder Aufgaben, die Vorgehensweisen sichtbar machen. Entsprechend wurde bei der Konstruktion der eigenen Lernstandserfassungen (vgl. 3.3.1) auf Auswertungshinweise und Strategieinformationen geachtet.

Einige Bausteine der Entwicklung mathematischer Kompetenzen sowie zum Teil auch deren Beziehungen untereinander sind bekannt (vgl. 1). Mit der Lernstandserfassung 1 des eigenen Diagnose- und Förderkonzeptes ‚Kalkulie' (Gerlach et al. 2007), basierend auf dem in 1.4.3.2 dargestellten integrierten Entwicklungsmodell wurde versucht, diese einzelnen Bausteine, die zum Teil Voraussetzungen der beispielsweise mit HRT oder DEMAT +1 abgeprüften Fertigkeiten darstellen, also leistungsmäßig früher ansetzen, in den Blick zu nehmen (vgl. 3.3.1): Mit differenzierten Aufgaben sollen frühe mathematische Kompetenzen der Stufen 1 bis 4 feinmaschiger erfasst werden. Curricular orientiert und zum Teil dem HRT 1-4 und DEMAT 1+ ähnliche Aufgaben der Stufen 4 bis 7 verteilen sich auf die Lernstandserfassungen 2 und 3.

Diese Lernstandserfassungen sind auf das dazugehörige Förderkonzept ‚Kalkulie' (vgl. 3.2) abgestimmt. Diese Anpassung ist wichtig, da sich aufgrund ihres deskriptiven Charakters aus der Diagnostik allein keine konkreten Fördermaßnahmen ableiten lassen – Förderziele werden vielmehr abgeleitet aus der jeweils zu Grunde gelegten Theorie des Kompetenzerwerbs (vgl. Fritz 2003, 287). Bevor die Lernstandserfassungen in 3.3.1 dargestellt werden, wird zunächst in 3. das Gesamtkonzept ‚Kalkulie' vorgestellt.

3. Konkrete Umsetzung von Diagnose und Förderung mit dem Konzept Kalkulie

3.1 Einleitung

Nicht nur die Neugestaltung der Schuleingangsstufe mit individueller Verweildauer, die weitestgehende Vermeidung von Zurückstellungen und die allmähliche Vorziehung des Einschulungsalters (vgl. MSW 2006) erfordern Unterrichts- und Förderkonzepte, welche die weiter zunehmende Heterogenität der Schülerschaft berücksichtigen. Eine Konsequenz dieser zunehmenden Heterogenität betrifft die Individualisierung der Lernprozesse: Alle Kinder sind dem Grad ihrer Schulfähigkeit entsprechend zu fördern, auch üblicherweise zurückgestellte Kinder müssen innerhalb der Schuleingangsphase integrativ gefördert werden. Damit verbunden ist die Notwendigkeit, Unterrichtsstrukturen zu verändern: Gleichschrittiges und zielgerichtetes Fortschreiten ist besonders häufig Ursache für frühes Schulversagen, da bei langsam lernenden Kindern Lernvoraussetzungen und -anforderungen immer weiter auseinanderdriften. Diese Situation erfordert eine größtmögliche Individualisierung der Lernprozesse durch Differenzierungsmaßnahmen. An bereichsspezifischen, konkreten Konzepten zur Individualisierung von Lernprozessen fehlt es jedoch noch. Mit dem nachfolgend vorgestellten Förderkonzept Kalkulie (Gerlach et al. 2007) soll ein solches inhaltliches Förderkonzept angeboten werden.

Darstellung und Erläuterung des Konzeptes sollen mit einem Zitat eingeleitet werden, an dem sich wesentliche Aspekte und Schwerpunkte von Kalkulie illustrieren lassen:

> „Wer Kindern bei ihren Lernaktivitäten wirksam helfen möchte, muss versuchen, die Schwierigkeiten zu <u>verstehen</u>, die sie bei <u>ihrer</u> <u>Konstruktion</u> eines <u>brauchbaren Zahl- und Operationsverständnisses</u> bewältigen müssen.“ (Gerster 2003a, 201; Hervorheb. M.G.).

Der Aspekt des <u>Verstehens</u> ist insofern von zentraler Bedeutung für eine passgenaue Förderung des einzelnen Kindes, als eben dieser Verstehensprozess nicht einfach, aber für die Förderung gleichzeitig notwendige Voraussetzung ist. Für Erwachsene sind die Schwierigkeiten von Schülern beim Mathematiklernen nicht einfach zu durchschauen und nachzuvollziehen, da die eigenen Zahl- und Operationsvorstellungen sehr früh unbewusst entwickelt und verinnerlicht wurden (vgl. ebd.). Die Voraussetzungen für späteres Mathematiklernen entwickeln sich vorschulisch zum Teil auf der Grundlage angeborener kognitiver Schemata und werden zu anderen Teilen erworben (vgl. 1.3 und 1.4). Ebenso liegen die Wurzeln schulischer Lernschwierigkeiten in Mathematik häufig in der vorschulischen Entwicklung (vgl. Walther et al. 2003). Bei erschwertem Fähigkeitserwerb häufig nicht ausreichend entwickelte Vorkenntnisse müssen Bestandteil von Förderung sein können – dazu ist fundiertes Wissen über diese frühe Entwicklung von Zahlbegriff und Operationsverständnis notwendig. Aus diesem Grund stützt sich Kalkulie auf das dargestellte Entwicklungsmodell unter Berücksichtigung aktueller Annahmen zum Wissenserwerb.

Ein umfassendes Verstehen der Schwierigkeiten des Kindes beinhaltet auch ein Nachvollziehen der individuellen Bedeutungskonstruktion. Relevante Bedingungsfaktoren sind hier zum einen die *Individualität* der Lernprozesse („ihre Konstruktion") und zum anderen deren konstruktiver Charakter. Sowohl auf der Grundlage konstruktivistischer Annahmen über Lernen als auch unter pädagogischen, inhaltlichen und motivationalen Gesichtspunkten ist ein Ansetzen am individuellen Entwicklungsstand sinnvoll. Nicht alle Aufgabentypen, Formulierungen, Repräsentationen etc. sind für jedes Kind gleich gut zu verstehen. Jeweils individuell zugängliche Modelle oder Herangehensweisen müssen daher gefunden und angeboten werden, ohne dabei inhaltlich beliebig zu sein. Z*u weit* gefasster Individualisierung kann jedoch zu Beliebigkeit führen:

> „Wenn Kollegen der Mathematikdidaktik die Botschaft verbreiten, dass Kinder mit ihren individuellen Verfahren über den Zehner rechnen sollen, dann darf man sich nicht wundern, wenn Kinder auf Dauer ihre individuellen zählenden Verfahren verfestigen." (Schipper 2001, 23).

Ist also ein individuell erschließbarer Zugang gefunden und erarbeitet worden, müssen davon ausgehend andere, mathematisch weiterführende Modelle erschlossen werden. Diese zweite, nicht spontane, weil in der individuellen Bedeutungskonstruktion des Kindes nicht dominante Herangehensweise dient dann der erweiternden Vertiefung der Ersterarbeitung (vgl. Ellrott & Aps-Ellrott 2003, 384). In diesem Sinne bietet Kalkulie verschiedene Ansatzpunkte und bietet Freiraum für individuelle Zugänge. Mit dem Konzept wird anstelle einer – ungeeigneten (Portmann 1997, 246) – Differenzierung der Lern*ziele* eine individualisierte Förderung durch ein Ansetzen an individuellen Lern*wegen* und an von Person und Lerngeschichte abhängigen subjektiven Deutungen möglich. Arithmetisch-didaktisch übliche Strukturen und Verfahren bleiben jedoch immer das eigentliche Ziel, und fortsetzbare, tragfähige Rechenstrategien werden immer angeboten, so dass ein ‚brauchbares Zahl- und Operationsverständnis' entwickelt werden kann.

Die Eckpunkte des Förderkonzeptes setzen sich also zusammen aus dem **Erkennen der Vorkenntnisse**, dem **Verstehen individueller Bedeutungskonstruktion** und dem daran ansetzenden Aufbauen bereichsspezifisch **tragfähiger und weiterführender Vorstellungen, Prozeduren und Strategien** auf der Grundlage des dargestellten Entwicklungsmodells und der Annahmen zu Wissenserwerbsprozessen. Zudem wurden für die Konzeptentwicklung Grundschullehrpläne, Schulbücher und Förderhandbücher kritisch gesichtet. Kalkulie bietet damit Fördermöglichkeiten für Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen und beinhaltet Aufgabenbereiche, mit denen bereits sehr früh eingesetzt werden kann. Im Hinblick auf rechenschwache Kinder war dabei besonders zu berücksichtigen, dass sich diese Lernprozesse häufig sehr langsam entwickeln und wesentliche Vorwissenselemente bzw. Erfahrungen fehlen. In Kalkulie werden diese Aspekte berücksichtigt und in sehr entfalteter und differenzierter Form vermittelt. Dabei ist die konstruktivistische Annahme der Subjektivität von Lernprozessen Leitgedanke.

In Kalkulie werden neben grundlegenden mathematischen Kompetenzen inhaltsspezifisch auch metakognitive und strategische Fertigkeiten gefördert. Des Weiteren werden von Anfang an die verschiedenen Ebenen, auf denen Rechenprozesse stattfinden können – handelnd, anschaulich, abstrakt – einbezogen und in Verbindung zueinander gesetzt. Ein weiteres wesentliches Charakteristikum von Kalkulie ist der Umgang mit Sachaufgaben von der untersten Ebene an. Förderziele sind im Einzelnen:

- Entwicklung eines elaborierten **Zahlbegriffs** (Verbindung Zähl- & Mengenschemata)
- Entwicklung strukturierter & tragfähiger **Zahl- und Zahlenraumvorstellungen** sowie **Rechenoperationen** auf der Grundlage des **Teile-Ganzes-Konzeptes**
- Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Zahlen, Aufgaben und Rechenoperationen zur Entwicklung **nicht-zählender Rechenstrategien**
- Förderung von Intermodalität durch Flexibilität und Reflexivität in der Nutzung unterschiedlicher **Repräsentationsebenen**
- Erarbeiten eines Grundrepertoires an auswendig gewussten **Rechenfakten**
- Einsatz **heuristischer Hilfsmittel** wie Skizzen oder Tabellen
- Einsatz mathematischer und allgemeiner **Problemlösestrategien** wie systematisches Probieren, Beziehungen nutzen, vergleichen, analysieren etc.
- Entwicklung von **Strategiebewusstsein**
- Ausbau der protoquantitativen Schemata und des Problemlösens über **Sachaufgaben** und Ausbilden der Fähigkeit, Rechenprozeduren auf Sachaufgaben anzuwenden

Kalkulie besteht aus drei inhaltlich systematisierten Bausteinen zu den Bereichen der Voraussetzungen für schulisches Mathematiklernen (Baustein 1), der Grundlegung zentraler strukturierter Zahl-, Zahlenraum- und Operationsvorstellungen (Baustein 2) und der Vermittlung nicht-zählender Rechenstrategien und der Automatisierung des Kleinen 1+1 (Baustein 3). Besonderer Wert wird dabei auf geeignete aufgabenbezogene Instruktionen und

Strategievermittlung gelegt. Bei der Auswahl der Förderschwerpunkte helfen bausteinbezogene Lernstandserhebungen. Kalkulie besteht aus folgenden Komponenten (vgl. 3.3):

- Bausteinbezogene **Lernstandserfassungen**
- **Erarbeitungsphase** neuer Inhalte & **Übung** und Flexibilisierung erarbeiteter Inhalte
- Mischung von ‚herkömmlichen' **Rechenaufgaben** und **Sachaufgaben** zu möglichst allen Inhaltsbereichen und auf möglichst jedem Entwicklungsniveau
- Vorschläge zu **Vermittlung, Instruktion und Strategieeinsatz**
- Förderung **metakognitiver** und **volitional-motivationaler** Aspekte durch aufgabenbezogene Maßnahmen und das förderbegleitende Führen eines **Lerntagebuches**

3.2 Konzeptinhalte: 3 Bausteine

Kalkulie basiert auf der in 1.4.3.2 dargestellten Theorie. Wie dort gezeigt, lassen sich aus Forschungsbefunden zwei für Mathematiklernen zentrale Entwicklungsaspekte ableiten:

1. Verbindung von Zahl und Menge
2. Entwicklung eines numerischen Teile-Ganzes-Konzeptes

Grundlage für Mathematiklernen ist somit die Verfügbarkeit eines umfassenden Zahlbegriffes mit ordinalen, kardinalen und relationalen Zahlbedeutungen sowie von Einsichten in Teile-Ganzes-Strukturen. Für anschlussfähiges Lernen ist darüber hinaus der Aufbau arithmetisch-didaktisch üblicher und tragfähiger Strukturierungen von Zahlen und Zahlenraum sowie nicht-zählender Strategien notwendig. Förderziel ist es, bereichsspezifische Voraussetzungen, elaborierte Zahl- und Operationsvorstellungen, strukturierte Zahlenraumvorstellungen und effektiv und sicher einsetzbare Rechenfertigkeiten und nicht-zählende Rechenstrategien zu vermitteln. Das Teile-Ganzes-Konzept lässt sich auf alle Zahlen und hier interessierende Rechenoperationen anwenden und liegt als Grundstruktur dem gesamten Förderkonzept zugrunde. Je nach Intention tritt diese Struktur mehr oder weniger deutlich zutage. Diese Inhalte sind in drei großen Bausteinen systematisch aufbereitet (vgl. Tab. 3.1).

In **Baustein 1** sind Aufgaben zu Vorläuferfähigkeiten und zur Integration von Mengen und Zahlen zusammengestellt. Dieses bereichsspezifische Vorwissen bedingt wesentlich Qualität und Quantität des weiteren Lernens (vgl. Gruber 1999; Krajewski 2003; Renkl 1996; Stern 1998). Aufgrund genetisch vorbereiteten elementaren Domänenwissens kommen Kinder zwar „vorbereitet“ zur Welt, trotzdem benötigen sie in individuell unterschiedlichem Umfang Anregung und Unterstützung zu Anwendung und Erweite-

Tabelle 3.1: Übersicht über die Kalkulie-Bausteine (nach Gerlach et al. 2007, 23)

	Baustein 1: Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen (Stufen 1-3/4)	**Baustein 2:** Strukturen im Zwanzigerraum (Stufe 4 und Beginn Stufe 5)	**Baustein 3:** Nicht-zählende Rechenstrategien (Stufen 5-7)
Erarbeiten / Üben	1.1 Reihen bilden und Zählen (Stufen 1-2)	2.1 Strukturen erkennen & herstellen	3.1 Strategien „Kraft der 5“ und „Kraft der 10“ festigen
	1.2 Mengenaspekte und Kardinalität (Stufe I3)	2.2 Strukturen geschickt nutzen	3.2 Teile-Ganzes-Beziehungen verstehen
	1.3 Zahlen- und Mengenwissen integrieren (Beginn Stufe 4)	2.3 Strukturen flexibilisieren	3.3 Rechenfakten erwerben

rung ihres Wissens. So verfügen leistungsschwache Schulkinder häufig über qualitativ und quantitativ unzureichendes bereichsspezifisches Vorwissen. *Dass* die genetische, domänenspezifische Grundausstattung des Menschen vorschulisch fast *alle* Kinder zum Erwerb umfangreicher mathematischer Kenntnisse und Konzepte grundsätzlich befähigt sowie die Bedeutung von deren Ausbau sollen mit einem Exkurs verdeutlicht werden:

Ezawa (2002, 101ff.) reklamiert dieses intuitive Zahlen- und Mengenwissen auch für Kinder mit leichter geistiger Behinderung:

> „Viele – nicht alle – haben einen gut ausgeprägten Sinn für Zahlen, verstehen also ihr System. Sie entdecken Beziehungen und sind offen für mathematische Probleme. Sie haben ein Gefühl für Proportionen, lernen Größen zu vergleichen und Verhältnisse abzuschätzen, mit Geld und anderen Größen umzugehen und Ergebnisse zu überschlagen. Sie haben dabei im Allgemeinen weniger Mathematikunterricht als andere Schüler.“

Lern- oder geistig behinderte Kinder haben häufig Schwierigkeiten, selbst die Grundaufgaben abzurufen und weisen verfestigte Fingerzählstrategien auf. Indem sie aber die Aufgaben solcherart an ihren Fingern ausrechnen, zeigen sie, „dass sie die entsprechenden Konzepte der Addition und Subtraktion gut verstanden haben, sonst hätten sie kein eigenes Verfahren dafür und kämen gar nicht zu richtigen Ergebnissen.“ (ebd., 102). Weiter zeigt Ezawa (ebd.), dass geistig Behinderte sogar Beziehungen zwischen Aufgaben und zwischen Zahlen sowie Regeln (z.B. Kommutativgesetz) entdecken können, sie können diese Regeln und heuristische Strategien (z.B. Ableiten von bekannten Aufgaben) anwenden, sie verstehen und nutzen dekadische Analogien und können solche Strategien auf größere Zahlen übertragen. Anforderungen wie Kopfrechnen, also das Abrufen automatisierter Rechenfakten sowie schriftliche Rechenverfahren im Sinne eines Anwendens festgelegter, abstrakter Rechenschritte werden von behinderten Schüler dagegen besonders schlecht bewältigt; gerade diese Anforderungen stellen aber in der Regel den Kern des (Förder-)Unterrichts für schwache und behinderte Schüler dar (vgl. ebd.). Diese Befunde lassen annehmen, dass die schwachen Leistungen solcher Kinder in hohem Umfang auf mangelnde Gelegenheit zu Entdeckung, Erprobung und Diskussion von Gesetzmäßigkeiten, Analogien etc. zurückzuführen sind (vgl. ebd.). Auch Baroody (1986; 1988) hat mathematische Kenntnisse von geistig behinderten Kindern untersucht und gezeigt, dass gezielte Anleitung und Unterstützung auch diesen Kindern den Erwerb grundlegender mathematischer Kompetenzen ermöglicht.

Das impliziert, dass das „pessimistische Stereotyp", behinderten Kindern seien hauptsächlich als zentral erachtete Prozeduren und isolierte, schwierigkeitsreduzierte Aufgaben durch häufige Wiederholung zu vermitteln etc., ersetzt wird durch eine optimistischere Perspektive, derzufolge auch diese Kinder unter bestimmten Umständen, d.h. durch Berücksichtigung und Einbindung des informellen Vorwissens sowie durch gezielte, intensive Förderung eigenaktiver Wissenskonstruktion zu intelligenter Anwendung von Mathematik in der Lage sind (vgl. Baroody 1999, 84f.). Lern- und geistig behinderte Kinder verfügen zu Schulbeginn also über weniger mathematisches Vorwissen als Regelschüler (vgl. Ezawa 1992, 74), so dass bei der Auswahl von Förderinhalten auch Aspekte berücksichtigt werden müssen, die Kinder normalerweise vorschulisch informell erwerben (Mengenbegriff, Zählfertigkeiten, kardinale Zählbedeutung; vgl. 1.3 und 1.4). Baustein 1 bietet entsprechend Aufgaben zu Reihenbildung, Zählen, Mengenaspekten, Kardinalität und zur Integration von Zahlen- und Mengenwissen.

Baustein 2 beinhaltet Aufgaben zur Entwicklung geeignet strukturierter Vorstellungen von Zahlen und Zahlenraum. Zahlen werden hier insbesondere als gegliederte Quantitäten (vgl. Gerster 2003b) auf der Basis – zunächst noch protoquantitativer – Teile-Ganzes-Vorstellungen erarbeitet. Der Aufbau strukturierter Zahl- und Zahlenraumvorstellungen basiert dabei auf arithmetisch-didaktisch üblichen und weiterführenden Strukturen. Betont werden Feld- und Reihendarstellungen sowie 5er- und 10er-Strukturen.

Auf dieser Basis strukturierter Vorstellungen zu Zahlen, Zahlenraum und Zahlbeziehungen werden in **Baustein 3** nicht-zählende Rechenstrategien entwickelt, um Beziehungen nutzendes, geschicktes Rechnen zu fördern. Das Teile-Ganzes-Verständnis soll hier auf der Ebene der Ziffern anwendbar und damit numerisch werden. Um das Gedächtnis bei späteren, komplexen Aufgaben zu entlasten, ist die Automatisierung dieser zuvor *einsichtig* erworbenen Grundaufgaben vorgesehen.

Neben bereichsspezifischen, inhaltlichen Aspekten bestimmen u.a. der Entwicklungsstand einzelner affektiver Bereiche, basaler Fähigkeitsbereiche wie Motorik, perzeptive und kognitive Funktionen, Sprache sowie soziales, Lern- und Leistungsverhalten die Schwerpunktsetzung einer Intervention. Eine Überbetonung ‚multisensorischer Anschauung' ist aber zu vermeiden, „wenn dabei die konzeptuelle Strukturierung vernachlässigt wird" (Gerster & Schultz 2000, 38). Eine kausale Verknüpfung einzelner kognitiver Funktionen mit mathematischem Lernen ist problematisch, da „mathematische Konzepte letztlich als ‚natürliche' Destillate der Sinneswahrnehmung konzeptualisiert" würden (ebd., 45). Ansätze, Mathematiklernen auf basale und Teilfunktionen zurückführen (vgl. u.a. Milz, 1999), greifen demnach zu kurz. Ein reines Funktionstraining basaler Fähigkeiten stärkt u.U. die geförderten Basisfunktionen, Auswirkungen auf die fachspezifischen Leistungen haben sich allerdings nicht nachweisen lassen (vgl. Fritz & Ricken 2001a, 43), da Reifungsdefizite neuropsychologischer Basisfunktionen zur Erklärung von Teilleistungsstörungen im Rechnen zu unspezifisch sind (vgl. von Aster 2003, 169). Eingeschränkte Funktionen einzelner Fähigkeitsbereiche können jedoch durchaus den Erwerb mathematischer Kompetenzen behindern, so dass eine Förderung dieser Bereiche im Rahmen *flankierender* Maßnahmen durchaus sinnvoll sein kann. In Kalkulie können derartige Maßnahmen allerdings nicht berücksichtigt werden.

Nachfolgend werden die Bausteine erläutert, die Anforderungen z.T. durch Beispiele aus Kalkulie illustriert und zu den Entwicklungsstufen in Beziehung gesetzt (vgl. 1.4.3.2).

3.2.1 Baustein 1 Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen (Stufen 1-3/4)

In Baustein 1 sind Aufgaben zu allen identifizierten Vorwissenselementen und den notwendigen Integrationsprozessen zwischen Mengen und Zahlen in drei Unterbausteinen zusammengestellt. Die Aufgaben werden aufgrund ihrer spezifischen Anforderungen grob nach dem dargestellten Stufenmodell (vgl. 1.4.3.2) systematisiert. Diese Zuordnung ist nicht exakt und kann nur Orientierungsrahmen sein, da sich die Kompetenzen unregelmäßig und zum Teil parallel entwickeln.

3.2.1.1 Baustein 1.1 Reihen bilden und Zählen

In 1.1 findet man vorwiegend Anforderungen, die den Stufen 1 und 2 zugeordnet werden können. Dabei werden insbesondere sequenzielle Aspekte betont wie beispielsweise pränumerische Seriationsaufgaben, über die allgemeine Prinzipien der Reihenbildung vermittelt werden. Durch Aufsagen von Abzählversen, Aufsagen der Zahlreihe in wechselnden Situationen oder gemeinsames bzw. modellierendes Zählen kann die Zahlreihe automatisiert werden. Zählaufgaben werden hier in sehr ausführlicher Form angeboten, da der Erwerb der Zahlwortreihe eine Vielzahl differenzierter Fertigkeiten und Einsichten erfordert. Hierbei sind auch schon protoquantitative Aspekte des Vergleichs, des Vermehrens und Verminderns und sogar des Teile-Ganzes-Verständnisses involviert.

Die folgende Aufgabe dient der Verinnerlichung der Zahlwortfolge und bezieht bereits erste Flexibilisierungsübungen, also Anforderungen von Stufe 2 ein (vgl. Abb. 3.1).

Zahlwortreihe: Zählen und Weiterzählen

Material → **KV Ziffernkärtchen** (siehe Handreichung, bitte ausschneiden)

Inhalt Mündliche Zählaufgaben

Vorgehen/Aufgabenstellung
Wichtig: Regelmäßig über einen längeren Zeitraum üben! Evtl. begleitende Rhythmisierung (z. B. klatschen, klopfen, hüpfen) oder Veranschaulichung über Gegenstands-Paare bzw. Ziffernkärtchen.

- *Vorwärtszählen so weit wie möglich*

» „Wie weit kannst du zählen? Zähle mal laut."

- *Brettspiele* spielen und die *Spielzüge laut mitzählen*
- *Bei Spielen laut zählen* z. B. verstecken oder Spiele, bei denen etwas verändert wird
- *Weiterzählen/Flexibles Vorwärtszählen*

» „Zähle laut. Beginne bei ..."

- *Zählen in Zweierschritten* (ggfs. zählt die Lehrerin vor, das Kind wiederholt)

» „Ich mache es vor: Hör gut zu! ... und nun versuchen wir das noch mal zusammen."

Hinweis: Schrittweises Zählen stellt eine hohe Anforderung dar, die von einigen Kindern noch nicht erbracht werden kann; anderen Kindern kann dies zumindest auf der verbalen Ebene (Auswendiglernen, Nachahmungslernen) schon vermittelt werden. Diese Übungen sollten daher bei Schwierigkeiten auf einen späteren Zeitpunkt verschoben werden (s. Teil 3 ‚Zahlen- und Mengenwissen integrieren').

Ziel
Verinnerlichung und flexible Anwendung der Zahlwortreihe

Verschiedene Strategien

Zählen in Zweierschritten
Veranschaulichung durch konkrete Objekte, die im Alltag paarweise vorkommen (z.B. Schuhe, Socken, Handschuhe; s. Abb. 1)

Veranschaulichung über Ziffernkärtchen (Reihe bilden und jede zweite Karte nach unten verschieben; s. Abb. 2)

Zählen im Kopf (immer 1 Zahl auslassen)

Weiterzählen
Zahlwortfolge vergegenwärtigen („Wie geht es immer nach 5 weiter?"), insbesondere Orientierung an der 5 und der 10.

Abb. 1

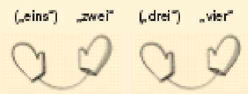


Abb. 2

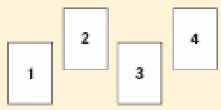


Abbildung 3.1: Aufgabenbeispiel I. Baustein 1.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 47f.)

Auf Stufe 2 können durch die Strategie „count all" zählend einfache Additionen durch Auszählen aller beteiligten Mengen gelöst werden. Ein Weiterzählen z.B. vom ersten Summanden ist jedoch noch nicht möglich. Zur Vermeidung rein zählenden Rechnens und zur Unterstützung von Verständnis von Mengenbeziehungen und Operationsbedeutung sind Aufgaben hilfreich, in denen trotz hinzufügender oder wegnehmender Handlungen das Ganze und seine Teile sichtbar sind. Stufe 2 lassen sich folgende Aufgabenbeispiele zuordnen (vgl. Abb. 3.2 und 3.3).

Mit Aufgaben wie der Subtraktionsaufgabe aus Abb. 3.3 *„Anna und Jan spielen zusammen: Sie haben 10 Bauklötze. Anna gehören 4 Bauklötze. Wie viele Bauklötze gehören Jan?"* lassen sich einseitige Zählstrategien aufbrechen. Der Blick wird auf Teile-Ganzes-Beziehungen gelenkt.

Vorbereitung von Sachaufgaben: Rechnen mit Bilderfolgen

Material KV12, evtl. Plättchen

Inhalt Handlungsabfolgen: In Bilderfolgen dargestellte Situationen durch Vergleich der verschiedenen Situationen auf den Einzelbildern interpretieren sowie additiv und subtraktiv beschreiben und deuten; evtl. Summen und Differenzen bilden und Unterschiede ermitteln. Die Bilder sollen mit Handlungen und mathematischer Symbolsprache in Beziehung gesetzt werden.
Dabei geht es stets schon um Teile-Ganzes-Beziehungen:

- Ein Ganzes (z. B. 6 Bonbons) zerfällt in Teile (z. B. in 2 auf einem Teller und 4 neben dem Teller)
  Struktur: Ganzes-Teil-Teil (= Subtraktion)
- Teile werden zu einem Ganzen zusammengesetzt (z.B. werden zu den 2 Bonbons noch 4 Bonbons dazugelegt).
  Struktur: Teil-Teil-Ganzes (= Addition)

Vorgehen/Aufgabenstellung
Bilderfolgen vorlegen: zunächst zum Betrachten auffordern und Vermutungen anstellen lassen; die Vorgänge unter Nutzung von Zahlwörtern verbalisieren; wenn möglich, die Zahlensätze notieren lassen

» Was siehst du auf diesem Bild?

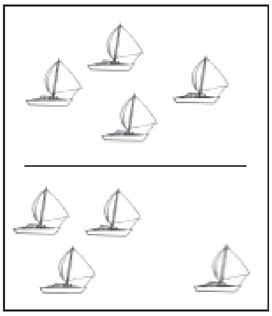
» Was passiert auf den Bildern?

» Hat sich etwas verändert?

» Beschreibe genau: Wie viele Segelboote siehst du hier? Und dort? ...

» 4 Segelboote liegen im Hafen. Dann segelt ein Boot weg. Übrig bleiben ...

» Wie viele Segelboote sind es nun (weniger)?



Nun wird die Bilderfolge zerschnitten und die beiden Einzelbilder werden in umgekehrter Reihenfolge aneinander gelegt:

» Was passiert jetzt? [Z. B. liegen 3 Boote im Hafen und 1 Boot kommt dazu.]

Erweiterung um erste Mengenaspekte
Durchführung mit Material: Dargestellte Situationen mit Plättchen nachlegen und so die Mengenverminderung bzw. -erweiterung durch konkrete Manipulationen nachempfinden und auf situationsfremdes Material übertragen.

Ziel
Handlungsgeschehen verstehen (Situationsmodell erstellen) und mathematisieren (z. B. durch Zahlwörter oder mit Plättchen)

Verschiedene Strategien

- Gesamtmenge zählend ermitteln und Teilmengen durch Zählen oder simultanes Erfassen bestimmen
- Zu Grunde liegende Rechenoperation benennen (noch nicht formal!), z. B. „Zwei fahren weg."
- Resultate beschreiben, z. B. „Es sind 2 weniger geworden und 4 bleiben übrig" – unbedingt beide Seiten berücksichtigen!

Abbildung 3.2: Aufgabenbeispiel II. Baustein 1.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 66f.)

Sachaufgabenmit konkretem Material

Material Gleich große Bauklötze

Inhalt Sachaufgaben der Typen ‚Kombination', ‚Angleichung' und ‚Austausch'.
Diesen Aufgaben liegt zum einen die Struktur des Vermehrens oder Verminderns zugrunde. Daher können solche Aufgaben bereits bearbeitet werden, wenn die Zahlreihe ausreichend beherrscht wird. Zum anderen geht es immer um die Triade Summand–Summand–Summe, also um die Beziehung der Komponenten Teil–Teil–Ganzes zueinander. Dieser Aspekt wird ausführlich erst im Teil „Mengen vergleichen" thematisiert.
Um das Erkennen der Strukturgleichheit zwischen Text und arithmetischer Operation zu erleichtern, werden in den Aufgaben vertraute und elementare Handlungen wie Wegnehmen, ‚Dazutun', Abgeben, Schenken/Bekommen, zusammen spielen etc. behandelt.

Vorgehen/Aufgabenstellung Mündliche Vorgabe einer Sachaufgabe. Bearbeitung mit Material, zeichnerisch oder (verbal) zählend. In jedem Fall soll eine Skizze angefertigt werden. Die Zahlangaben sollen variiert werden. Folgende Aufgabentypen bzw. Formulierungen sind möglich:

Austauschaufgabe mit Addition, Endmenge unbekannt

» „Anna hat 5 Bausteine. Dann gibt ihr Jan noch 2 Bausteine. Wie viele Bausteine hat Anna nun?"

Kombinationsaufgabe mit Addition, Endmenge unbekannt

» „Anna hat 5 Bausteine. Jan hat 3 Bausteine. Sie möchten zusammen damit spielen. Wie viele Bausteine haben sie zusammen?" oder:

» „Jan baut einen Turm aus 4 Bauklötzen. Dann nimmt er noch 2 Bauklötze aus der Spielzeugkiste und setzt sie oben drauf. Wie hoch ist sein Turm dann?"

Austauschaufgabe mit Subtraktion, Endmenge unbekannt

» „Jan hat 7 Bausteine. Er gibt Anna 2 Bausteine ab. Wie viele Bausteine hat Jan dann noch?" oder:

» „Jan spielt mit 7 Bauklötzen. Anna möchte auch spielen und nimmt ihm 2 Bauklötze weg. Mit wie vielen Bauklötzen kann Jan nun einen Turm bauen?"

Austauschaufgabe mit Subtraktion, Endmenge unbekannt

» „Anna und Jan spielen zusammen: Sie haben 10 Bauklötze. Anna gehören 4 Bauklötze. Wie viele Bauklötze gehören Jan?"

Angleichungsaufgabe mit Subtraktion, Differenzmenge unbekannt

» „Anna hat 8 Bausteine. Jan hat 6 Bausteine. Wie viele Bausteine muss Jan noch aus der Spielzeugkiste bekommen, damit er genauso viele Bausteine hat wie Anna?"

Verschiedene Strategien
Situation mit konkretem Material nachbauen

Skizze erstellen (s. Abb. 1 und Abb. 2): Wichtig ist die gleichzeitige Repräsentation der Teilmengen und der Gesamtmenge. Dies dient der Vorbereitung der triadischen Teil-Teil-Ganzes-Struktur im Teil ‚Mengenaspekte und Kardinalität'; gelöst werden muss die Aufgabe hier allerdings nur auf zählender Ebene.)

Weiterzählen, Zusammenzählen (laut, mit den Fingern, im Kopf)

Abbildung 3.3: Aufgabenbeispiel III. Baustein 1.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 69f.)

Zur Unterstützung bewusster Wahrnehmung und Steuerung von Zählprozessen und von Verständnis und Repräsentation des Kardinalzahlprinzips eignet sich beispielsweise folgende Aufgabe (vgl. Abb. 3.4). Diese Aufgabe dient zunächst unter Aspekten der Reihenbildung und der Entwicklung von Zählfertigkeiten der Analyse von Zählprozessen: Indem das Kind aufgefordert wird, einem Teddy das Zählen beizubringen, muss es sich die notwendigen Anforderungen und Prinzipien von Zählvorgängen bewusst machen und diese verbalisieren. Diese Art von Reflexion und expliziter Erläuterung jemand anderem gegenüber soll die Einsicht vertiefen und zu kognitiver Klarheit über das Zählen führen. Wenn der „übende Teddy" sich dann verzählt, muss das Kind noch gründlicher die Zählprozesse analysieren, es muss seinen Zählprozess und den anderer (den des Teddys) überwachen und nach richtig oder falsch beurteilen. Um solche Bewertungen vornehmen zu können, muss das Kind genau wissen, welche Prinzipien das Zählen leiten und welche Merkmale relevant bzw. irrelevant sind.

Bewusstmachen der Zählprinzipien:
„Ich bringe meinem Teddy das Zählen bei"

Inhalt Einsicht in Funktion und Verwendung von Ziffern und Zahlworten, Zählfertigkeit (jedem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet)

Vorgehen/Aufgabenstellung

Einsicht in Zählprozesse und in den Aufbau der Zahlwortreihe vertiefen
Einüben des Zählens über einen Teddy/eine Action-Figur. Reflektieren über Zählen, Ziffernverwendung, Strategien und spezifische Probleme

» Der Teddy kann nicht zählen. Kannst du ihm helfen, es zu lernen? – Was muss der Teddy wissen (üben etc.), um zählen zu können?

Das Kind bringt nun dem Teddy mit Material seiner Wahl das Zählen/die Ziffern bei (Idee nach Brinkmann & Brügelmann (o. J., Z.08).

Überwachung von Zählprozessen
Der Teddy ‚übt' nun das Zählen: Er zählt und ‚verzählt' sich (zählt Objekte doppelt oder lässt Objekte aus). Das Kind zählt immer mit und muss jedes Ergebnis bewerten (richtig/falsch) und die Ursachen für die Fehler (des Teddys oder auch die eigenen!) ergründen.

» Hat der Teddy richtig gezählt?

» Weshalb bekommt der Teddy ein anderes Ergebnis heraus?

Erweiterung
Die Erweiterung um kardinale Aspekte kann durch E17 erfolgen.

Ziel
Perspektivwechsel und psychische Entlastung durch die Spielfigur erleichtern das Diskutieren über Vorgehensweisen/Spezifika/Strategien. Das eigene Vorgehen wird klarer wahrgenommen und reflektiert.

Analyse

» Was müsste der Teddy denn lernen/tun, damit er zählen (oder: Zahlen lesen/schreiben) kann?

» Was musst du ihm genau beibringen?

Planung, Reflexion, Kontrolle

» Warum hast du ein anderes Ergebnis als der Teddy?

Abbildung 3.4: Aufgabenbeispiel IV. Baustein 1.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 51)

Freeman et al. (2000; vgl. 1.4.3.2) haben explizit darauf hingewiesen, dass echte Einsicht in kardinale Bedeutungen dann erworben werden kann, wenn das Eindeutigkeitsprinzip (vgl. Gelman & Gallistel 1978; 1.4.2) verstanden wird: Auf dieser Basis kann aus falschen Zählprozeduren auf falsche Kardinalwerte und umgekehrt kann aus korrekten Zählprozeduren auf korrekte Kardinalwerte geschlossen werden. Eine ‚falsche' Zählprozedur bedeutet eine fehlerhafte 1-zu-1-Zuordnung zwischen Zahlwort und Zählobjekt. Die Autoren nehmen an, dass die Notwendigkeit, zwischen zwei unterschiedlichen Zählergebnissen (Kardinalwerten) entscheiden zu müssen, zu einer konzeptuellen Repräsentation des Kardinalprinzips führt. Dieses Vorgehen und die Beobachtung des

Kindes von 1-zu-1-Zuordnungen während des Zählprozesses führen dazu, dass eine Beziehung zwischen dem Eindeutigkeitsprinzip, dem Zählprozess und dem Kardinalwert der gezählten Menge hergestellt wird (vgl. Freeman et al. 2000, 87). Auf diese Weise entsteht kardinales Verständnis auch aus der Sammlung von Erfahrung mit falscher und richtiger Zählung einer gleichen Menge, wobei ‚richtig' oder ‚falsch' auf der Grundlage von Einsicht in das Eindeutigkeitsprinzip beruht. Daher wurde diese Aufgabe in abgewandelter Form noch einmal in Baustein 1.2 aufgenommen: Dort wird die Aufgabenstellung um Fragen nach der Anzahl erweitert („Wie viele?").

3.2.1.2 Baustein 1.2 Mengenaspekte und Kardinalität

Unter 1.2 finden sich hauptsächlich Aufgaben zu Mengenaspekten. Dort werden elementare Mengenerfahrungen zu den wesentlichen Aspekten vermittelt: Vergleichen, Vermehren/Vermindern und Teile-Ganzes-Beziehungen. Zählen und protoquantitative Mengenbegriffe werden so weiter miteinander verbunden. Diese Weiterentwicklung und Betonung der Kardinalität sowie der Teile-Ganzes-Vorstellungen entspricht den Anforderungen, die hauptsächlich mit Stufe 3 verbunden werden. Der auf dieser Stufe zu erwerbende erste Begriff von Kardinalität lässt sich folgenden Teile-Ganzes-Anforderungen auf protoquantitativem Verständnisniveau zuordnen.

Im ersten Beispiel (vgl. Abb. 3.5) wird der kardinale Aspekt derart betont, dass eine Menge dann gleich bleibt, wenn die Anzahl der einzelnen Elemente gleich bleibt.

Im nächsten Beispiel (Abb. 3.6) sind kardinale Mengenvorstellungen und das Nutzen quantifizierter Teile-Ganzes-Beziehungen erforderlich (vgl. 1.4.1 und 1.4.3). Verdeckte Teile können nicht konkret ausgezählt werden, sondern vorgegebene oder zuvor ermittelte Zahlworte müssen in eine Mengenbedeutung umgewandelt werden. Damit sind die Aufgaben durch Auszählen der Gesamtmenge („Zwei und drei") oder durch Weiterzählen vom ersten Zahlwort / von der ersten Mengenbedeutung lösbar.

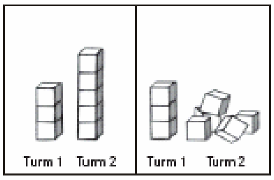
Obwohl das vollständige Teile-Ganzes-Verständnis, also die Einsicht, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, erst auf Stufe 5 erreicht wird, können einfachere Teile-Ganzes-Aufgaben auf quantifizierter Ebene (vgl. 1.4.1 und 1.4.3) wie in Abbildung 3.7 dargestellt schon auf Stufe 3 zählend gelöst werden.

Mengenvergleich durch 1-zu-1-Zuordnung oder Invarianz

Material Gleich große Bauklötze

Inhalt Einsicht in die gleiche Mächtigkeit trotz unterschiedlicher Anordnung der Bauklötze (Mengeninvarianz) durch Vergleich von Höhen (oder Längen) und Anzahlen bzw. Turmhöhe und Bauklotzanzahl

Vorgehen/Aufgabenstellung
Aus Bauklötzen baut die Lehrerin wiederholt zwei Türme auf. Mal sind es gleich hohe, mal unterschiedlich hohe Türme. Einer wird jeweils zum Einsturz gebracht. Danach stellt die Lehrerin Fragen (vgl. Kutzer 1983, S. 91):



» Oh je! Der höhere Turm ist eingestürzt! Welcher war höher?

» Ob dieser Turm auch wieder höher ist, wenn wir ihn neu aufbauen? Was meinst du? Probiere es bitte mal aus.

» Oh je! Ein Turm ist eingestürzt! Welcher war höher? Was meinst du? Probiere es bitte mal aus.

Die korrekte Antwort wird ermittelt, indem das Kind die Bauklötze auszählt.

Ziel
Unterscheidung relevanter von irrelevanten Merkmalen:
Anzahl der Elemente = relevantes Merkmal
Lage, Anordnung etc. = irrelevantes Merkmal

Planung, Reflexion und Kontrolle
Kontrolle durch erneutes Aufbauen oder Auszählen der Bausteine

Verschiedene Strategien
Überprüfung durch 1-zu-1-Zuordnung oder durch Zählen

» Wie kann man auch (besser) feststellen, ob der eingestürzte Turm wirklich höher (niedriger) war?

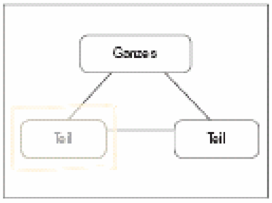
Die Bauklötze jeweils auszählen und über den Anzahlvergleich die Lösung finden.

Abbildung 3.5: Aufgabenbeispiel I. Baustein 1.2 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 87)

Teile-Ganzes-Beziehungen (Teile teilweise verdeckt)

Material Bauklötze, einfarbige Plättchen oder Muggelsteine, Rechenschiffchen, Tuch o. Ä. zum Abdecken

Inhalt Mengen in unterschiedliche Teile zerlegen können bzw. von sichtbaren Teilmengen auf abgedeckte Teilmengen schließen können; Aufgabenbearbeitung über geordnete und ungeordnete Plättchenmengen (homogenes Material) und über Rechenschiffchen (strukturiertes Material).



Die Rechenschiffchen bieten mit ihrer Struktur einen festen Rahmen, der als Bezugspunkt für gegliederte Mengenvorstellungen sehr hilfreich ist. Rechenschiffchen und geordnete Plättchenmengen werden später in Baustein 2 für die Entwicklung tragfähiger Zahl- und Zahlraumvorstellungen aufgegriffen und weiter ausgebaut.
Die Struktur Teil–Teil–Ganzes (s. Abb.) soll nicht vollständig sichtbar sein – eine Teilmenge muss sich das Kind vorstellen. Damit soll die Verinnerlichung der Struktur über konkrete Mengen, deren Teile verteilt, umverteilt oder verändert werden, vorbereitet werden.
Die Aufgaben sind lösbar über Auszählen der Gesamtmenge und über Weiterzählen von einer Teilmenge aus. Das Weiterzählen stellt hohe Anforderungen an das Kind, da dafür bereits Zählzahl und Anzahl ausreichend miteinander verbunden sein müssen. Daher sind die Aufgaben als Vorbereitung zu der entsprechenden Weiterentwicklung im Teil ‚Zahlen- und Mengenwissen' integrieren zu verstehen (E 32 bis E 35).

Vorgehen/Aufgabenstellung
Aufgaben wie vorgegeben bearbeiten; bei Schwierigkeiten oder zur Kontrolle können sie offen nachgeprüft bzw. neu bearbeitet werden.

[. . .]

b) Vereinigen verdeckt mit Plättchen
Eine Menge zeigen:

» Wie viele Plättchen sind das?

Verdecken und eine weitere Menge zeigen:

» Wie viele Plättchen sind das?

Die zweite Menge ebenfalls unter das Abdecktuch schieben:

» Wie viele Plättchen sind jetzt insgesamt unter dem Tuch?

c) Vereinigen halboffen mit Rechenschiffchen
Eine Teilmenge ist sichtbar, die andere wird verdeckt.

» Auf dem Schiffchen siehst du 4 Passagiere. Unter dem Tuch sitzen noch 3 Passagiere. Wie viele Passagiere sind das *zusammen* [mit der Hand den Bereich von offen liegenden und verdeckten Plättchen umfahren]?

[. . .]

Verschiedene Strategien
- Auszählen der Gesamtmenge an der Vorlage, an den Fingern, im Kopf
- Weiterzählen vom ersten (bekannten) Summanden

Abbildung 3.6: Aufgabenbeispiel II. Baustein 1.2 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 99f.)

Übungsaufgabe:

Teile-Ganzes-Beziehungen

Material KVs 26 & 27

Inhalt KV 26: Üben der triadischen Grundstruktur Teil-Teil-Ganzes als Voraussetzung für spätere Additions-, Subtraktions- und Ergänzungsaufgaben
KV 27: Erweiterung der triadischen Grundstruktur: ein Ganzes in mehr als zwei Teile zerlegen bzw. daraus zusammengesetzen

Vorgehen/Aufgabenstellung
Bearbeitung der Arbeitsblätter KVs 26 & 27; die Aufgabenstellung wird den Kindern anhand des Beispiels auf dem Arbeitsblatt erläutert:

» Hier im Dach [zeigen] sollen immer genauso viele Punkte sein wie in den beiden Zimmern [zeigen] zusammen Punkte sind. Manchmal fehlen die Punkte im Dach, manchmal fehlen sie in einem oder in beiden/allen drei Zimmern. Zeichne die fehlenden Punkte ein.

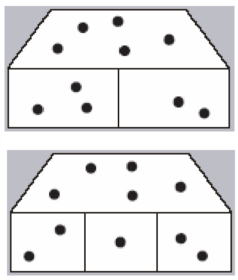


Abbildung 3.7: Aufgabenbeispiel III. Baustein 1.2 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 118ff.)

Numerische Teile-Ganzes-Aspekte werden in Baustein 1 also zunächst *vorbereitet*. Hier finden sich bereits Aufgaben mit Teile-Ganzes-Bezügen, diese sind jedoch noch nicht eigentlich numerisch. Zur Illustration der damit verbundenen Bedeutung und Möglichkeiten soll folgende Aufgabe dienen (vgl. Abb. 3.8).

Teile-Ganzes-Beziehungen: Sachaufgaben

Material Schokoladeneier/-kugeln oder Wendeplättchen

Inhalt Herstellen von gleich mächtigen Teilmengen bzw. gleichmäßiges Verteilen einer Menge, z. B. durch 1-zu-1-Zuordnung in Sachkontext mit vertrautem Alltagsbezug (Ostern, Weihnachten…)

Vorgehen/Aufgabenstellung
Mündliche Aufgabenstellung; Bearbeitung mit oder ohne Material; in jedem Fall soll eine Zeichnung angefertigt werden, falls möglich, mit symbolischer Notation.

2 Teilmengen

» Mama bereitet Osterkörbchen vor. Jedes Kind soll das Gleiche bekommen: Jan und Anna sollen jeder ein Körbchen zu Ostern bekommen. Wie kann Mama 9 (8 …) Eier auf die Körbchen von Jan und Anna verteilen? Male auf. – Kann Mama die Eier gerecht verteilen? – Was kann sie tun, damit es gerecht wird?

3 Teilmengen

» Mama bereitet Osterkörbchen vor. Jedes Kind soll das Gleiche bekommen: Jan, Anna und Eva sollen jeder ein Körbchen zu Ostern bekommen. Wie kann Mama 9 (8 …) Eier auf die Körbchen von Jan, Anna und Eva verteilen? Male auf. – Kann Mama die Eier gerecht verteilen? – Was kann sie tun, damit es gerecht wird?

Verhältnisse zwischen 2 Teilmengen

» Jan und Anna suchen Ostereier. Jan findet 4 (5 …) Eier und Anna findet 7 (6 …) Eier. Male auf. – Können sie die Eier gerecht unter sich verteilen? Mache eine Zeichnung und beschreibe.

Variation
Gerade und ungerade Anzahlen, Personenzahlen

Verschiedene Strategien

1-zu-1-Zuordnung

Ausprobieren/Verschieben
Erst „nach Gefühl" verteilen, dann durch Verschieben allmählich verteilen.

Abbildung 3.8: Aufgabenbeispiel IV. Baustein 1.2 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 101)

Diese Aufgabe wird auf einer Stufe gestellt, auf der nur ein protoquantitatives Teile-Ganzes-Verständnis, also noch keine Verbindung zwischen Zahlen und Teile-Ganzes-Konzept vorausgesetzt wird (vgl. 1.4.3). Die Anforderung ist aber eine Teile-Ganzes-Anforderung. Die Lösung allerdings erfolgt auf einer anderen Ebene, beispielsweise durch 1-zu-1-Zuordnung. Es werden nur Verteilungshandlungen vollzogen, die Quantifizierung des Teile-Ganzes-Schemas kommt erst später hinzu und ist hier auch noch nicht erforderlich. Eine solche Aufgabe dient also der Vorbereitung auf die Erarbeitung eines quantifizierten und später eines numerischen Teile-Ganzes-Verständnisses. Dass hier keine quantifizierten oder gar numerischen Teile-Ganzes-Konzepte zum Tragen kommen, kann nicht durch das Aufgabenformat sichtbar gemacht werden – denn dieses bezieht sich ja explizit auf Teile-Ganzes-Kompetenzen – sondern erfordert die Beachtung der eingesetzten Lösungsstrategie. Eine Bearbeitung durch 1-zu-1-Zuordnung spricht für Teile-Ganzes-Kompetenzen auf pränumerischem Niveau, Strategien wie Zählen und beispielsweise Notieren: „8 Eier = 4 Eier + 4 Eier" oder Operieren auf Zahlniveau: „8=4+4" weist dagegen Teile-Ganzes-Kompetenzen auf quantifizierter bzw. auf numerischer Ebene aus.

3.2.1.3 Baustein 1.3 Zahlen- und Mengenwissen integrieren

Die Aufgaben unter 1.3 erweitern den Zahlbegriff, indem ordinale und kardinale Bedeutungen weiter miteinander verbunden und um relationale Zahlbedeutungen erweitert werden. Dies entspricht überwiegend Stufe 4. Damit verbundene Anforderungen des Weiterzählens *um* eine bestimmte Anzahl und des Verständnisses einer Zahlvorgabe im Sinne ihrer Zähl- *und* Anzahlbedeutung sind beispielsweise bereits in folgender Aufgabenstellung aus Baustein 1 enthalten (vgl. Abb. 3.9).

Teile-Ganzes-Beziehungen und Zahlrelationen: Weiterzählen

Material Bauklötze oder Plättchen, Rechenschiffchen oder KV Rechenschiffchen (s. Handreichung), 2 Tücher o. Ä. zum Abdecken, Pappe oder flache offene Schachtel

Inhalt Mengen in unterschiedliche Teile zerlegen können bzw. von sichtbaren Teilmengen auf abgedeckte Teilmengen schließen können; Aufgabenbearbeitung über geordnete und ungeordnete Plättchenmengen mit homogenem Material und über Rechenschiffchen (strukturiertes Material).
Die Rechenschiffchen bieten mit ihrer Struktur einen festen Rahmen: Dieser ist als Bezugspunkt für gegliederte Mengenvorstellungen sehr hilfreich. Rechenschiffchen und geordnete Plättchenmengen werden in Baustein 2 für die Entwicklung tragfähiger Zahl- und Zahlenraumvorstellungen aufgegriffen und weiter ausgebaut.
Die Struktur Teil–Teil–Ganzes soll hier *nicht* vollständig sichtbar sein. Das Kind muss sich die triadische Struktur (s. Abb. 1 und 2) vorstellen. Das Verständnis dafür wird in dieser Aufgabe vorbereitet über konkrete Mengen, deren Teile verteilt, umverteilt oder verändert werden.
Die Aufgaben greifen die Aufgabenstellung aus E 26 auf und entwickeln sie weiter: Weiterzählen, Zahlvorgabe, Zählzahl und Anzahl, relationaler Zahlbegriff.

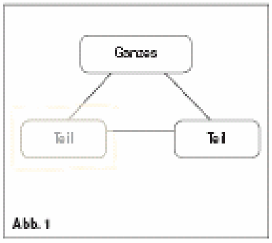


Abb. 1

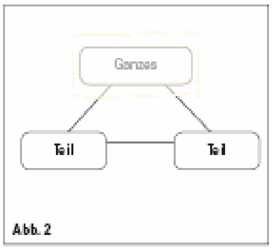


Abb. 2

Vorgehen/Aufgabenstellung
Aufgaben wie vorgegeben bearbeiten, bei Schwierigkeiten oder zur Kontrolle können sie offen nachgeprüft bzw. neu bearbeitet werden. Die Aufgaben a), b), h) & i) entsprechen strukturell E 26; sie sind hier nochmals aufgeführt, da sie sich als Einführung in die Aufgabenstellung eignen. Bei ausreichender Vertrautheit können sie jedoch weggelassen werden.

[…]

m) Ergänzen verdeckt mit einem Fünfer-Rechenschiffchen
Unter dem Tuch liegt eine Menge.

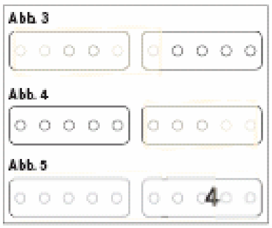
» Auf dem Schiffchen sitzen unter dieser Brücke (Tuch) 3 Passagiere. Wie viele Passagiere muss ich noch unter die Brücke setzen, damit es 5 Passagiere werden?

n) Ergänzen zum Zehner halboffen mit zwei Fünfer-Rechenschiffchen

» 4 Passagiere kann man sehen. Wie viele sind unter der Brücke? (s. Abb. 3)

» 5 Passagiere sind von der Brücke verdeckt. Wie viele Passagiere sind insgesamt auf dem Schiff? (s. Abb. 4)

o) Ergänzen zum Zehner verdeckt mit zwei Fünfer-Rechenschiffchen und zwei Tüchern



» 10 Passagiere sind von den beiden Brücken verdeckt. Unter dieser Brücke [zeigen] sind 4 Passagiere. Wie viele Passagiere sind unter der anderen Brücke? (s. Abb. 5)

[…]

Verschiedene Strategien
Weiterzählen vom ersten (bekannten) Summanden; Rückwärtszählen oder ergänzendes Zählen

Abbildung 3.9: Aufgabenbeispiel I. Baustein 1.3 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 137ff.)

Aufgaben wie das dargestellte Ergänzen zum Zehner werden vor allem in Baustein 2 bearbeitet. Dort werden intensiv arithmetisch-didaktisch sinnvolle Strukturierungen erarbeitet, um Teile-Ganzes-Vorstellungen anschlussfähig zu strukturieren. Die Stufe 4 zugeordneten Anforderungen können nicht exakt Baustein 1 oder Baustein 2 zugeordnet werden. Insgesamt werden sie jedoch hauptsächlich in Baustein 2 berücksichtigt. Den Anforderungen von Stufe 4 auf einer elementaren Ebene entspricht aber auch bereits das Sachaufgaben-Beispiel aus Baustein 1 (vgl. Abb. 3.10).

Teile-Ganzes-Beziehungen und Zahlrelationen: Sachaufgaben

Material Bauklötze oder Plättchen

Inhalt Zahlvorgaben in ihrer Bedeutung sowohl als Zählzahl als auch als Anzahl verstehen; Mengen in unterschiedliche Teile zerlegen können bzw. von bekannten Teilmengen auf unbekannte Teilmengen schließen können; Untersuchen von Beziehungen zwischen Teilen und Ganzem in vertrautem Alltagskontext

Vorgehen/Aufgabenstellung
Jede Aufgabe wird mündlich gestellt, die Bearbeitung erfolgt im Kopf oder über die konkrete Handhabung mit Bauklötzen. Zu jeder Aufgabe sollte vom Kind eine Skizze angefertigt werden.

» Jan gibt 3 Bausteine an Anna ab. Jetzt hat Jan noch 5 Bausteine übrig. Wie viele Bausteine hatte er vorher?

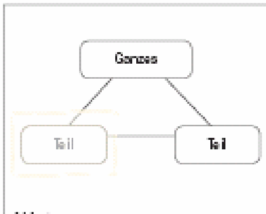


Abb. 1

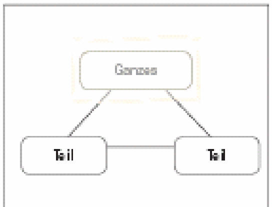


Abb. 2

» Anna hat noch 5 Bausteine. Vorher hatte sie 10 Bausteine. Wie viele Bausteine hat sie Jan abgegeben?

» Anna hat 4 Bausteine. Sie möchte einen 7er-Turm bauen. Wie viele Bausteine muss sie noch aus der Spielzeugkiste nehmen?*

» Jan hat 10 Bausteine. Aus 4 Bausteinen hat er einen Turm gebaut. Wie viele Bausteine hat er noch für einen neuen Turm?

» Jan baut zwei Türme: einen 3er-Turm und einen 6er-Turm. Wie viele Bausteine hat Jan insgesamt verbraucht?

Verschiedene Strategien
- Erproben mit Bausteinen und dann nachzählen
- Vorwärts bzw. rückwärts weiterzählen

Abbildung 3.10: Aufgabenbeispiel II. Baustein 1.3 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 141)

3.2.2 Baustein 2 Strukturen im Zwanzigerraum (Stufe 4 und Beginn Stufe 5)

In Baustein 2 wird die Entwicklung geeignet strukturierter Vorstellungen von Zahlen und Zahlenraum betont. Diese Aufgaben sind erst dann sinnvoll, wenn die in Baustein 1 enthaltenen zentralen Voraussetzungen weitgehend als gesichert gelten können. Baustein 2 vertieft hauptsächlich die mit Stufe 4 verbundenen Anforderungen, beinhaltet aber auch schon Stufe 5 zugeordnete Einsichten wie die unterschiedliche Zerlegbarkeit von Mengen und Zahlen.

Zahlen sollen hier als gegliederte Quantitäten (vgl. Gerster 2003b), also auf der Basis von Teile-Ganzes-Vorstellungen erarbeitet werden. Darum wird hier der Entwicklung tragfähiger strukturierter Zahl- und Zahlenraumvorstellungen viel Platz eingeräumt. Gliederndes Operieren sowohl mit homogenem als auch mit strukturiertem Material soll visuelle Vorstellungen von gegliederten Quantitäten und deren Beziehungen aufbauen und verinnerlichen helfen. Die Ablösung von konkretem Material wird gezielt herbeigeführt.

Der Aufbau strukturierter Vorstellungen bleibt dabei nicht beliebig, sondern nutzt arithmetisch-didaktisch übliche und weiterführende Strukturen. Dazu dient entsprechend strukturiertes Material (vgl. dazu ausführlich 3.3.7). Rechenoperationen bleiben daran keine Ausführungen „aufeinanderfolgender Zählvorgänge“ (ebd., 160), sondern bilden bei Verwendung von Zweifarbigkeit der Objekte die triadische Struktur bzw. die Beziehung zwischen den beteiligten Komponenten des jeweiligen Tripels ab (vgl. dazu 1.4.3.2). Als tragfähige Gliederungen wirken dabei insbesondere 5er- und 10er-Strukturen unterstützend. Darüber hinaus sollten sowohl Feld- als auch lineare, also Reihendarstellungen möglich sein, damit zum einen der Aufbau aus Einern und Zehnern (Feld) und zum anderen die ordinale Struktur der Zahlen (Reihe) einsichtig wird. Sowohl kardinale als auch ordinale Aspekte (z.B. über Zahlenstrahldarstellungen) sowie eine gute Übertragbarkeit in graphische Darstellungen und/oder in höhere Zahlenräume sollten beachtet werden. Diese Prinzipien führten zu folgender Auswahl an Arbeitsmitteln:

- *Rechenschiffchen*: 5er- und 10er-Struktur; sowohl Reihen- als auch Feldanordnung möglich; Zahlenraum bis 5, 10, 15 oder 20; konkretes Handeln mit Mengen ist ebenso möglich wie Operieren mit Ziffern – es kann auch strukturgleich mit Zwanzigerfeld und -reihe gearbeitet werden.
- *Rechenrahmen & -kette*: 5er- und 10er-Struktur; Zahlenraum beliebig beschränk- bzw. erweiterbar (bis max. 100)
- *Zwanzigerfeld & -reihe*: 5er- und 10er-Struktur; Feld- bzw. Reihenanordnung; konkrete Darstellung von Anzahlen und Rechenoperationen – dabei sind unterschiedliche Darstellungsvarianten gut möglich und deutlich vergleichbar; Fortführung im Hunderterfeld – Wenn das Kind vorwiegend zählende Rechenstrategien einsetzt, sollte vor allem mit der Feld-, weniger mit der Reihendarstellung gearbeitet werden, da die Zwanzigerreihe eher reines Zählen provoziert.
- *Zahlenstrahl*: Zentrale Darstellung ordinaler Zahlstruktur, Kleiner-/Größer-Beziehungen, Vorgänger-/Nachfolger- und Nachbarbeziehungen; in Kombination mit Zwanzigerreihen kann das Problem des hohen Abstraktionsgrades und der Unterscheidung zwischen Kardinal- und Ordinalzahl vermieden werden.
- *Rechenstrich*: Leerer Zahlenstrahl, auf dem individuell Zahlen oder Rechenwege durch Einzeichnen von Markierungen oder Sprüngen darstellbar sind – Lösungswege werden nicht vorgegeben, individuelle Rechenwege werden trotzdem strukturiert und sind nachvollziehbar: In diesem Sinne ist der Rechenstrich eigentlich schon eher eine Rechenhilfe als ein Veranschaulichungsmaterial.

Dem häufigen Problem, dass (Material-)Strukturen vom Kind nicht wahrgenommen werden und daher nicht nutzbar sind, soll durch gezielte Reflexion, systematische Veränderung, Vergleich mehrerer Alternativen und Vergleich der verschiedenen Materialien entgegengewirkt werden. Außerdem sollen Operationen zunächst auch an homogenem Material sowie immer auch durch eigene Skizzen ergänzt und angereichert werden. Da die Wahrnehmung grundsätzlich individuell geprägt ist (und insbesondere im Hinblick auf Kinder mit beeinträchtigter Wahrnehmung oder mangelnder räumlicher Orientierungsfähigkeit), sollen Arbeitsrichtung (z.B. Verwendung des Zwanzigerfeldes waagerecht oder senkrecht), Darstellungen und Lösungsstrategien während der individuellen Arbeit mit den einzelnen Arbeitsmitteln zumindest anfangs vom Kind selbst bestimmt werden. Bei einseitiger Bevorzugung z.B. bestimmter Anordnungen zur Zahldarstellung müssen Alternativen vom Lehrer modelliert werden. Grundsätzlich ist darauf zu achten, dass vielfältige Lösungswege bzw. Darstellungsvarianten gefunden werden. Ein einheitlicher Lösungsweg soll nicht angestrebt werden, vielmehr sollen verschiedene Zugänge zu einer Aufgabe zur Diskussion und zu strukturellem Vergleich genutzt werden.

Eine Verinnerlichung tragfähiger Zahl- und Zahlenraumvorstellungen erfolgt durch operatives Abändern von Mustern und durch mentales Operieren am vorgestellten Material. An den verwendeten Materialien werden zahlreiche Übersetzungsübungen empfohlen. Dies kann durch Ausführen einer Aufgabe an mehreren Materialien mit anschließender Reflexion und Bewertung erfolgen.

Bei den meisten Aufgaben wurde als Zahlenraum der Zwanzigerraum gewählt, eine Beschränkung auf kleinere oder eine Erweiterung auf größere Zahlenräume kann jedoch je nach Situation sinnvoll sein. So kann eine Beschränkung auf den Zwanzigerraum beispielsweise bei Aufgaben zur Verdeutlichen dekadischer Strukturen oder bei motivationalen Problemen nachteilig sein. Die Darstellung der Aufgaben innerhalb des Zwanzigerraumes hat also nur *exemplarischen* Charakter für Inhalte und Vorgehensweisen.

3.2.2.1 Baustein 2.1 Strukturen erkennen und herstellen

Arithmetisch-didaktisch sinnvolle Strukturen werden hier über individuelle Musterbildung und -interpretation mit homogenem Material vorbereitet: Das Nutzen von Mustern und Strukturen in Anordnungen von Zählobjekten dient einer schnellen und sicheren Anzahlbestimmung. Strukturieren von homogenen Objekt-Kollektionen, simultanes Anzahlerfassen (Mengen bis 4) und quasi-simultanes Anzahlerfassen (Mengen größer 4) bei geordneter und ungeordneter Zählvorlage und eigenes strukturiertes Konstruieren von Zahldarstellungen soll dies unterstützen. Ebenso dienen gliederndes Zählen und Zählen in Schritten (geschicktes Zählen) der Einsichtsbildung in Art und Bedeutung geeigneter Strukturen. Unterschiedliche Repräsentationen und Konfigurationen zu Zahlen vertiefen und flexibilisieren Zahlvorstellungen. Zahlen werden als Zählzahlen und als Anzahlen verwendet, Ordinal- und Kardinalzahlaspekt werden weiter miteinander verbunden. Das Deuten der Mengen als Summen („Wie viele sind das zusammen?“) und als Differenzen („Wie viele sind die einen mehr (weniger) als die anderen?“ „Wie groß ist der Unterschied?“) wird hier bereits einbezogen. Alle Zahl- und Anzahlerfahrungen sowie Zahl- und Formbegriffe sind hier allerdings noch ohne formales Rechnen möglich. Diese propädeutische Auseinandersetzung eignet sich jedoch bereits zur Förderung von Sicherheit im mündlichen Rechnen.

In Abbildung 3.11 wird beispielhaft eine Aufgabe zu gliedernder Mengenerfassung und zu Untersuchungen der Beziehungen der verschiedenen Teile vorgestellt.

Simultane & quasi-simultane Mengenerfassung

Material Wendeplättchen, Tuch o.ä. zum Abdecken

Inhalt Ungeordnete und geordnete Mengen visuell erfassen und die Anzahl bestimmen: Mengen größer 4 sollen gegliedert erfasst werden. Teilmengen sind zu erkennen und zu addieren. Differenzen zwischen Teilmengen bestimmen. Musterstrukturen nachbauen.

Vorgehen/Aufgabenstellung Ein- oder zweifarbige Plättchenmengen kurz abwechselnd geordnet und ungeordnet präsentieren, dann abdecken (siehe auch ausführliche Aufgabenstellung in Aufgabe → Erarbeiten 24, Baustein 1).

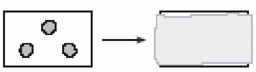
Aufgabenstellung

» „Wie viele Plättchen sind das?“

Variation der Abdeckzeit:

» „Wenn du dir alles gut gemerkt hast, sag mir Bescheid – dann decke ich die Plättchen wieder zu und erst dann sagst du mir, wie viele es wohl sein könnten.“

„Wie viele Plättchen siehst du? Sieh gut hin, dann gleich verstecke ich sie wieder unter dem Tuch.“



Variation von Farbigkeit und Anordnung:
(Zweifarbigkeit als zusätzliche Strukturierungshilfe; geordnet als besondere Muster oder ungeordnet als willkürliche Muster)

» „Von welcher Sorte gibt es mehr (weniger)?“

» „Wie viele schwarze Steine hast du gesehen? Und wie viele weiße? Wie viele Steine sind das zusammen?“

» „Wie groß ist der Unterschied, wenn man die schwarzen und die weißen Steine vergleicht?“

Variation der Handlung:

» „Baue diese Plättchen so auf wie die Plättchen unter dem Tuch.“

Ziel
Strukturen für schnelle und sichere Anzahlbestimmung nutzen.

Verschiedene Strategien
- kleine Anzahlen mit einem Blick (simultan) erfassen
- größere Anzahlen durch Bilden überschaubarer Teilportionen gegliedert erfassen
- gliederndes oder schrittweises Zählen

Reflexion/ Bewerten der Strategie

» „Wie kannst du schneller/leichter sehen, wie viele Plättchen es sind?“

Abbildung 3.11: Aufgabenbeispiel I. Baustein 2.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 2, 10f.)

3.2.2.2 Baustein 2.2 Strukturen geschickt nutzen

In 2.2 werden arithmetisch-didaktisch übliche und weiterführende, kardinale und ordinale Strukturen zum geschickten und effektiven Rechnen durch zentrale strukturierte Veranschaulichungsmittel erarbeitet. Darüber sollen tragfähige Vorstellungsbilder zu Zahlenraum, Zahlbeziehungen und Rechenoperationen aufgebaut werden. Die in 2.1 erarbeiteten, eher willkürlichen Muster mit homogenen Materialien sollen hier erweitert werden durch besondere, arithmetisch bedeutsame Strukturen: Darstellung, Erfassung, Vergleich, Verminderung und Vermehrung von Mengen werden an Reihen- und Felddarstellungen behandelt. Die protoquantitativen Schemata Vergleich, Vermindern / Vermehren und Teile-Ganzes-Konzept werden über strukturierte Mengen vertieft und durch Abzählen mit dem Zählschema verbunden: Beispielsweise soll das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen mithilfe der Materialstrukturen vertieft werden – ein Vierer soll nicht mehr nur als vier Einzelne, sondern als zusammengesetzt aus unterschiedlichen Portionen (z.B.: zwei Zweier oder: ein Fünfer und wieder einen weg) begriffen werden. Die Aufgaben sind nach Materialstruktur unterteilt in:

- Rechenschiffchen
- Rechenrahmen und Rechenkette
- Zwanzigerfeld und Zwanzigerreihe (*Regeln*: Es dürfen keine Lücken gelassen werden (s. Abb. 3.12). Farben nicht willkürlich, sondern orientiert am Fünferrhythmus wechseln)
- Zahlenstrahldarstellungen

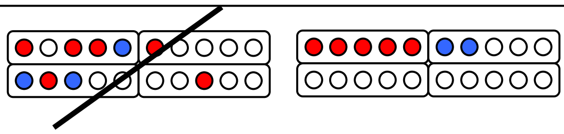


Abbildung 3.12: Regeln zur Benutzung von 20er-Feld und -Reihe (nach Gerlach et al. 2007, Baustein 2, 31)

Zu jedem Material werden Aufgaben zu Aktivitäten (Kennenlernen der Materialstrukturen, ordnende und strukturierende Operationen, Mengenerfassung), Rechenaufgaben und Sachaufgaben der Typen ‚Kombination', ‚Austausch', ‚Angleichung' und ‚Vergleich' angeboten. Die Sachaufgaben sind in einer Aufgabe zusammengefasst. Der Lehrer kann daraus bei Bedarf Aufgaben auswählen und mit dem aktuell eingesetzten Material bearbeiten lassen (möglich ist ebenfalls eine Bearbeitung unter Einsatz aller Materialien im Wechsel, sofern alle Materialien bereits vertraut sind).

Die vielfältigen Möglichkeiten, die Zahlenstrahl und insbesondere Rechenstrich bieten, sollen mit nachfolgendem Beispiel illustriert werden: Der leere Zahlenstrahl (Rechenstrich) hat sich als besonders kraftvolles Arbeitsmittel in der Hand des Kindes erwiesen, da daran der Zahlenraum selbst strukturiert und die Zahlbeziehungen selbst festgelegt werden müssen. Nicht nur die Zahlpositionen werden hier eingetragen, sondern auch ausgeführte Bewegungen in Form von Sprüngen. Damit lassen sich Denkwege und Strategien individuell darstellen. Dies hilft beim Rechnen. Um die Vorstellungen vom Aufbau des Zahlenraumes und Strategien zu flexibilisieren, bietet es sich an, Rechenstriche mit unterschiedlichen ‚Maßstäben' vorzugeben und daran eine gleiche Anzahl eintragen zu lassen (vgl. Lorenz 2003a, 18; Abb. 3.13 und das nächste Aufgabenbeispiel Abb. 3.14). Da besonders von schwachen Kindern die Striche am Zahlenstrahl lediglich als Zählhilfe verwendet werden (vgl. ebd.), zwingt der Rechenstrich zur eigenständigen Konstruktion der notwendigen Maßstäbe.

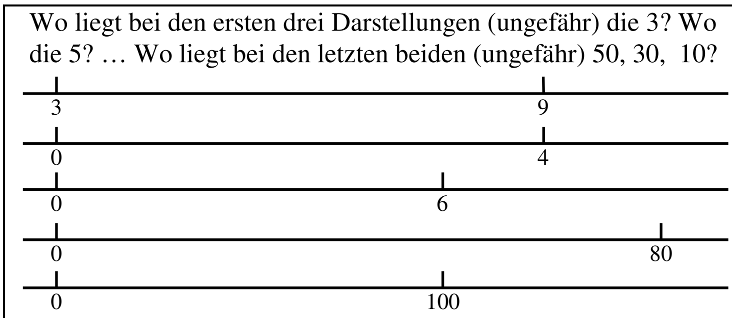


Abbildung 3.13: Aufgabenbeispiele zur Nutzung des Rechenstrichs (nach Lorenz 2003a, 18)

Zahlenstrahl und Rechenstrich: Rechenaufgaben

Material KVs 15 – 17, ggf. KVs Zahlenstrahl und Rechenstrich (s. Handreichung)
Im Hinblick auf die individuelle Leistung und Motivation ist zu überlegen, ob der Zahlenstrahl bis 10, 20 oder bis 100 sinnvoller ist.

Inhalt Vertiefung linearer und beziehungsvoller Zahlen(raum)vorstellungen, Addition und Subtraktion als Vor- und Zurückspringen erfahren, Erarbeitung relationaler Beziehungen zwischen Zahlen.

[…]

Vorgehen/Aufgabenstellung

Zahlenstrahl
Mündliche Aufgabenstellungen zu Addition, Subtraktion und Zahlzerlegung: Das Kind soll die Rechenoperationen am Zahlenstrahl ausführen und seine Handlungen verbalisieren. Es soll Operationsschritte als Bögen einzeichnen und die Aufgabe notieren.

a) Vorbereitung von Addition, Subtraktion und Zahlzerlegung

» Zeige die 4 (5 …). Jetzt hüpfe von der 4 noch 2 (3 …) Schritte weiter. Wo kommst du an? [Addition]

» Zeige die 6 (8 …). Nun hüpfe von dort aus wieder 2 (4 …) Schritte zurück. Wo kommst du an? [Subtraktion]

Reflexion:

» Nun bist du bei der 6 angekommen. Wie war dein Weg dorthin (z. B. 4 und noch 2). Kann man auch auf anderen Wegen zur 6 kommen?

» In welche Richtung musst du hüpfen, wenn die Zahl kleiner (größer) werden soll?

b) Addition und Subtraktion

Tausch- und Umkehraufgaben:

» Rechne 5 + 3. Zeichne ein, wie du gehüpft bist. – Nun rechne 3 + 5. Zeichne wieder ein. Erkläre immer, was du gerade tust.

» Jetzt rechne 8 – 3. Zeichne ein. Was fällt dir auf?

Subtraktion als Abziehen:

» Gehe zur 15. Jetzt hüpfe 8 Schritte zurück. Wo kommst du an? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

» Gehe zur 15. Dein Ziel ist die 5. Wie viele Sprünge musst du machen, um dorthin zu kommen? In welche Richtung musst du hüpfen? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

Subtraktion als Ergänzen:

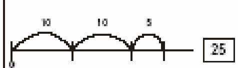
» Gehe zur 6. Dein Ziel ist die 12. Wie viele Sprünge musst du machen? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

c) Zahlzerlegung/Teile-Ganzes-Schema

» Dein Ziel ist die 8. Mit welchen Sprüngen kommst du von 0 aus dorthin? [z. B. 5 und 3]. Erkläre, zeichne ein und schreibe auf. Gibt es noch andere Möglichkeiten? Finde alle.

Rechenstrich
Mündliche Aufgabenstellung zu Positionsbestimmung, Zahlrelationen, Addition, Subtraktion und Zahlzerlegung: Das Kind soll die Rechenoperationen am Rechenstrich ausführen (Bögen einzeichnen), seine Handlungen verbalisieren und die Aufgabe notieren.

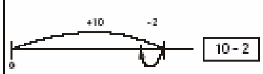
Abb. 1



a) Geschicktes Springen zu Zahlen
Zunächst sollte eine Festlegung der Sprung- und Hüpflänge (z. B. 10er-Sprünge und Einer-Hüpfer) erfolgen. Die Lehrerin zeichnet nun Sprünge und Hüpfer ein.

» Zu welcher Zahl bin ich gesprungen?

Abb. 2



Dann werden Anzahlen von Sprüngen und Hüpfern mit festgelegter Länge genannt, die das Kind in die gesuchte Zahl übersetzt. [Addition s. Abb. 1, Subtraktion s. Abb. 2]

» Wohin kannst du kommen, wenn du … machst?

b) Positionsbestimmung und Relationen (KV 15)

» Wo liegt ungefähr die 10? Zeichne ein. Wo liegt ungefähr die 6? Und die 20? Zeichne ein.

» Möchtest du noch eine für dich wichtige Zahl einzeichnen?

» Liegt die 6 näher an der 10 oder an der 20 (weiter weg)?

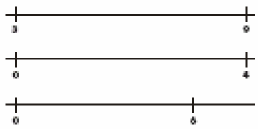
» Sind deine Zahlen richtig geordnet?

» Wo liegt auf deinem Rechenstrich die 14? Zeichne ein.

» Welche Zahl ist genauso weit weg von der 10 wie die 14?

c) Flexibilisierung von Positionen und Strategien (KV 17)
In Rechenstriche, die schon Markierungen mit unterschiedlichen Abständen enthalten, soll jeweils die gleiche Zahl eingetragen werden (s. Abb. 3, vgl. Lorenz 2003):

Abb. 3 „Wo liegt bei den Rechenstrichen (ungefähr) die 3?"



» Wo liegt die 3? Zeichne ein. Und wo liegt die 5?

Die unterschiedlichen Lösungen werden anschließend miteinander verglichen und analysiert.

d) Addition, Subtraktion und Zahlzerlegung (KV 16)

Tausch- und Umkehraufgaben:

» Rechne 2 + 3. Zeichne ein, wie du hüpfst. – Nun rechne 3 + 2. Zeichne wieder ein. Erkläre immer, was du gerade tust.

» Rechne 5 – 3 und sprich mit. Zeichne ein. Was fällt dir auf?

Subtraktion als Abziehen:

» Zeichne die 15 ein./Gehe zur 15. Jetzt hüpfe 8 Schritte zurück. Wo kommst du an? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

» Zeichne die 15 ein. Dein Ziel ist die 5. In welche Richtung musst du hüpfen? Wie viele Sprünge musst du bis zur 5 machen? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

Subtraktion als Ergänzen:

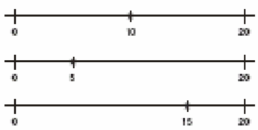
» Zeichne die 6 ein./Gehe zur 6. Dein Ziel ist die 12. Wie viele Sprünge musst du machen, bis du dort ankommst? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

e) Zahlzerlegung/Teile-Ganzes-Schema

» Dein Ziel ist die 8. Mit welchen Sprüngen kannst du von der 0 aus dorthin kommen? Erkläre, zeichne ein und schreibe auf.

» Gibt es noch andere Möglichkeiten? Finde alle.

Abb. 4 „Wo liegt bei den Rechenstrichen (ungefähr) die 10 (5, 15)?"



f) Variation der Arbeitsblätter KV 15 und 16
Anfangs- und/oder Endzahlen vorgeben – so können alle Zahlen/Aufgaben auf einem Arbeitsblatt zueinander in Beziehung gesetzt werden (s. Abb. 4).

Verschiedene Strategien
- Rechenoperation als Bewegungen am Rechenstrich (Addition = vorwärts hüpfen, Subtraktion = rückwärts hüpfen oder ergänzend vorwärts hüpfen; unterschiedliche Richtungen und Hüpflängen möglich)
- Zahlzerlegung: Zahlen sind (unterschiedlich) zerlegbar (Teile-Ganzes-Schema)
- Fünfer- und Zehnerstruktur als Rechenvorteil

Reflexion und Kontrolle
- Lösungswege verbalisieren
- Wo liegen einzelne Zahlen? Wie ist ihre Position/Relation zueinander?
- planvolle Konstruktion des Rechenstrichs

Vergleichen der Strategien
Vergleich von Hüpfstrategien (verschiedene Richtungen/Längen etc.)

Abbildung 3.14: Aufgabenbeispiel I. Baustein 2.2 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 2, 66f.)

3.2.2.3 Baustein 2.3 Strukturen flexibilisieren

Die in 2.2 erarbeiteten arithmetisch-didaktisch üblichen Strukturen mittels Darstellungen an strukturiertem Material sollen hier flexibilisiert, systematisch abgeändert und ineinander überführt werden: Diese Verzahnung unterschiedlicher Darstellungen zu einem zusammenhängenden System soll helfen, isolierte, bereichs- bzw. materialabhängige Vorstellungen zu vermeiden. Gezielte Transferübungen sollen das – für Lerner häufig nicht selbstverständliche – Erkennen der Strukturgleichheit ‚verwandter' Veranschaulichungen fördern. Unterschiedliche Darstellungsvarianten sollen als gleichbedeutend erkannt und strategisch sinnvoll gewechselt werden können.

Durch systematisches Abändern einzelner Strukturtypen werden operative Zahlbeziehungen aufgedeckt; dies soll operative Rechenstrategien beim Addieren und Subtrahieren in Baustein 3 vorbereiten. Um isolierte bereichs- oder materialabhängige Vorstellungen zu verhindern bzw. abzubauen, werden hier die zuvor erlernten (Rechen-)Operationen systematisch verinnerlicht und ohne Material ausgeführt. Das Kind soll sich die auszuführenden Operationen in einem ersten Schritt am Material *vorstellen*, ohne dieses zu benutzen. In einem zweiten Schritt sollen diese Operationen nicht mehr an Vorstellungsbilder eines bestimmten Materials gebunden sein, sondern in einem individuell entwickelten vorgestellten Zahlenraum ausgeführt werden.

3.2.3 Baustein 3 Nicht-zählende Rechenstrategien (Stufen 5-7)

Auf der Basis ausreichend strukturierter Vorstellungen zu Zahlen, Zahlenraum und Zahlbeziehungen werden in Baustein 3 gezielt zählende durch nicht-zählende Rechenstrategien ersetzt bzw. ergänzt. Gerster & Schultz (2000, 330f.) fassen die Nachteile zählender Rechenstrategien zusammen:

1. „Unklare Rolle des Anfangs- und Endgliedes der Zählsequenz"
2. „Zählendes Rechnen wird bei größeren Zahlen aufwendig".
3. „Zählendes Rechnen erschwert den Zugang zu Strukturgesetzen und Rechenvorteilen" (z.B. wird der Rechenvorteil ‚Kommutativität' bei der Aufgabe 3+5 bzw. 5+3 bei linearer Bearbeitung an der Rechenkette nicht sichtbar; dies kann auch das Fehlen der Strategie ‚Weiterzählen vom größeren Summanden' verursachen).
4. Lineare Zahldarstellungen (Rechenketten, Zahlenstrahl) lassen Zahlen nicht als Zusammensetzung aus anderen Zahlen, sondern als einzelnes „Ding" erscheinen.
5. Zählendes Rechnen unterstützt abstraktes Operieren mit Zahlen, so dass zählende Rechner häufig Schwierigkeiten bei der Lösung von Sachaufgaben bekommen.

Durch Nutzen von Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten soll hier denkendes, geschicktes Rechnen gefördert werden. Das bisher aufgebaute Teile-Ganzes-Verständnis soll nun auf der Ebene der Ziffern anwendbar und damit wirklich numerisch werden. Das Verständnis, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, und dass jeder Aufgabe eine triadische Grundstruktur Teil-Teil-Ganzes zugrunde liegt, kann Stufe 5 zugeordnet werden. Komplexere Anforderungen der Kompensation, Kovarianz und von Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben werden den Stufen 6 und 7 zugeordnet und ebenfalls in Baustein 3 entwickelt.

Die Betonung des Aufbaus flexibler Zerlegungskompetenzen beinhaltet die Zerlegung von Mengen in Teilmengen und die Bestimmung von Ergänzungs- oder Restmengen. Dazu gehört auch Einsicht in das Prinzip der Summenkonstanz, in das Kommutativgesetz und in die Umkehrbarkeit von Addition und Subtraktion. Gestützt wird das Rechnen durch die Nutzung von Stufen- bzw. Stützpunktzahlen (Fünfer- und Zehnerzahlen, ‚Kraft der 5 & 10'), durch Operationen des Halbierens und Verdoppelns sowie weiterer kraftvoller nicht-zählender Rechenstrategien (vgl. auch Gerster & Schultz 2000, 364):

- <u>Grundaufgaben</u>: Addieren / Subtrahieren der 0, 1, 2; Verdoppeln und Halbieren; Zehnersummen; 10 als Summand / Subtrahend (Kraft der 10); Kraft der 5
- <u>Ableitungsstrategien</u>: Tauschaufgaben; Nachbaraufgaben und ‚Verdoppeln plus 1' (Kovarianz beim Teile-Ganzes-Konzept); Gegensinniges Verändern der Summanden / gleichsinniges Verändern bei Differenzen und ‚Verdoppeln plus 2' (Kompensation beim Teile-Ganzes-Konzept)

Um das Gedächtnis bei späteren, komplexen Aufgaben zu entlasten, ist die Automatisierung der zuvor einsichtig erworbenen Grundaufgaben vorgesehen.

<u>3.2.3.1 Baustein 3.1 Strategien ‚Kraft der 5' und ‚Kraft der 10' festigen</u>

Da der 5 und der 10 eine besondere Bedeutung zukommt, werden in Baustein 3.1 entsprechende Aufgaben trotz Überschneidungen zu Teile-Ganzes-Aspekten zu einer gesonderten Aufgabengruppe zusammengefasst. 5 und 10 haben besondere Bedeutung für die Entwicklung einer strukturierten Zahlenraumvorstellung (vgl. Baustein 2) und ermöglichen an vielen Stellen vorteilhaftes Rechnen. Die 10 ist zudem wichtig für den dekadischen Aufbau des Zahlensystems. Zahlen in Beziehung zur 5 und 10 gesetzt z.B. als „8 ist 5 und 3" oder „von 6 bis zur 10 sind es noch 4" ermöglichen schnelles, sicheres und flexibles Rechnen von Aufgaben wie 8+7 (als 5+3 und 5+2, also (5+5)+(3+2)) etc. Im Einzelnen wird unterschieden in vier Anforderungen bzw. Rechenstrategien:

- **Kraft der 5** (liegen beide Summanden zwischen 5 und 10, lassen sich die enthaltenen Fünfer jeweils vorteilhaft zusammenfassen: 6+7=(5+1)+(5+2)=(5+5)+(1+2).
- **Kraft der 10** (10 als Summand oder als Subtrahend)
- **Zehnersummen**
- **Dekadische Analogien**

Nachfolgend wird ein Beispiel zu Zehnersummen gegeben (vgl. Abb. 3.15).

Zehnersummen – Ergänzung & Zerlegung

Material KV Zwanzigerfeld und Blankokärtchen (s. Handreichung) *oder* Karteikarten

Inhalt Aufgaben mit dem Ergebnis 10 sollen als hilfreiche Grundaufgaben kennen gelernt werden (Zerlegungen der 10)

Vorgehen/Aufgabenstellung

Vorübung am Zwanzigerfeld
Die Lehrerin legt auf dem Zwanzigerfeld Anzahlen < 10:

» Sieh auf dein Zwanzigerfeld. Wie viele Plättchen liegen dort?
» Wie viele Felder sind leer? – Wie viele Plättchen fehlen bis zur 10?
» Wie viele Plättchen liegen hier mehr (weniger) als 5?

„Finde alle Plusaufgaben mit dem Ergebnis 10" (Beispiel 8 + 2 = 10)

Aufgaben auf Kärtchen notieren und ordnen:

» Beginne mit der kleinsten Aufgabe.

Aufgaben bewerten:

» Was fällt dir auf?
» Welche Aufgaben findest du leicht (schwer)? Weshalb?

Strategien finden:

» Wie kannst du die schweren Aufgaben geschickter (leichter) rechnen?
» Man kann z. B. die Aufgabe 2 + 8 = 10 besser rechnen, wenn man sie als Tauschaufgabe 8 + 2 = 10 rechnet.

Verschiedene Strategien
- Materialstruktur als Hilfe für Ergänzungen bis 10 nutzen
- Schwierige Aufgaben als Tauschaufgabe (2 + 8 → 8 + 2)

Reflexion
» Welche Zahlen kommen bei diesen Aufgaben (dem Ergebnis 10) nur vor? (Summanden kleiner/gleich 10)

Abbildung 3.15: Aufgabenbeispiel I. Baustein 3.1 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 3, 16)

3.2.3.2 Baustein 3.2 Teile-Ganzes-Beziehungen verstehen

Durch Nutzung des Teile-Ganzes-Konzeptes sollen Additionen als Zusammensetzung eines Ganzen aus Teilen und Subtraktionen als Unterschied bzw. als Ergänzung gedeutet werden können. Das Teile-Ganzes-Konzept betont den Zusammenhang zwischen beiden Grundrechenarten besonders, da hier Rechensituationen sowohl additiv als auch subtraktiv interpretiert werden können. Die Beziehungen von Teilen zum Ganzen sowie Veränderungen von Teilen und Ganzem lassen sich in vier spezifische Anforderungsstrukturen differenzieren, die sich z.T. aber auch überschneiden können (vgl. 1.4.3.2):

- **Das Ganze in Teilmengen zerlegen (Stufe 5):** Bilden eines Ganzen durch Teile bzw. Zerlegen eines Ganzen in Teile. Dazu gehören das systematische Finden aller möglichen Zerlegungen einer Zahl (z.B. Zahlenhäuser) und als ‚besondere' Form der Aufteilung eines Ganzen in zwei Teile Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben.
- **Kompensation (Stufe 6):** Das Ganze bleibt unverändert, wenn Elemente von einem Teil zum anderen verschoben werden (vgl. Gerster & Schultz 2000, 341). Die Differenz bleibt unverändert, wenn an beiden Teilen gleiche Veränderungen vorgenommen werden. Dieser Aspekt kommt bei folgenden Aufgabenarten zum Tragen:

Gegensinniges Verändern bei Addition (6+8=14 und 5+9=14) und als spezielle Form Tauschaufgaben (5+4=9 und auch 4+5=9), gleichsinniges Verändern bei Subtraktion (8−5=3 und auch 7−4=3 und auch 9−6=3).

- **Kovarianz (Stufe 6):** Veränderungen an einem Teil des Ganzen verursachen entsprechende Veränderungen des Ganzen (vgl. ebd.). Das führt zu Nachbarbeziehungen (z.B. 1 oder 2 mehr oder weniger, Nachbaraufgaben, Vorgänger und Nachfolger).
- **Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben (Stufe 7):** Hier sind alle oben aufgeführten Aspekte integriert. Zusätzlich müssen Beziehungen zwischen mehreren voneinander abhängigen Aufgaben und Zahlen berücksichtigt werden. Die Bearbeitung erfordert Einsicht in operative Beziehungen, die Kenntnis der Zerlegungen zu einer Zahl sowie z.T. systematisches Ausprobieren. Entsprechende Aufgabenformate sind ‚Zahlenmauer', ‚Rechendreieck' und ‚Zauberdreieck'. Umkehraufgaben stellen eine frühe, wenig komplexe Form dar (das Zahlentripel bleibt erhalten, tritt nur in unterschiedliche Beziehungen zueinander: 5+3=8 und 8−3=5).

3.2.3.3 Baustein 3.3 Rechenfakten erwerben

Zur späteren sicheren und schnellen Verfügbarkeit und damit zur (Gedächtnis-)Entlastung bei komplexeren Aufgaben sollen die Grundaufgaben automatisiert verfügbar werden oder zumindest schnell von anderen automatisierten Aufgaben ableitbar sein. Aufbauend auf in 3.1 und 3.2 entwickeltem Verständnis für Zahlen, Zahl- und Aufgabenbeziehungen und einer strukturierten Zahlenraumvorstellung sollen hier die Rechenfakten des Kleinen 1+1 gedächtnismäßig verankert werden. Dabei soll die situationsadäquate Auswahl nicht-zählender Rechenstrategien geübt werden. Kopfrechenaufgaben sollen zu beiden Aufgabenbereichen 3.1 und 3.2 behandelt werden. Um als automatisiert gelten zu können, ist eine sichere Verfügbarkeit der Rechenfakten bei zeitlicher Begrenzung erforderlich. Die Grundaufgaben des Kleinen 1+1 werden dabei nicht beliebig oder gar ‚drillmäßig' eingeübt, sondern erfahren eine sinnvolle Strukturierung und Ordnung durch ihre Zuordnung zu verschiedenen Rechenstrategien sowie durch die jeweils subjektive Bedeutung einzelner Aufgaben. Grundlage dafür sind die operativen Strukturen der Zahlen sowie die operativen Beziehungen zwischen Zahlen und zwischen Aufgaben.

Die in 3.1 und 3.2 aufgebauten Strategien und strukturellen Einsichten sollen vermischt angewandt und situationsgerecht ausgewählt werden können. Möglichkeiten eines solchen Transfers sind im Beispiel in Abbildung 3.16 vorgestellt.

Erweiterter Transfer: Sachaufgabe Autozug

Inhalt Auseinandersetzung mit einer herkömmlichen Textaufgabe (s. u.) und Erweiterung der Aufgabenaspekte orientiert an der Lebensrealität und kindlichen Interessen (vgl. Dröge 1992). Der Ausgang ist bewusst offen gehalten, um Raum für Flexibilität in der kindlichen Handlungsfähigkeit zu bieten.

Hinweise: Der Zahlenraum bis 20 wird hier überschritten; die Aufgabe ist lösbar durch Verteilen und Addition sowie durch Multiplikation bzw. Division. Dies dient der Vorbereitung multiplikativen Operationsverständnisses.

Kennt das Kind Autozüge nicht, macht die Bearbeitung in dieser Form keinen Sinn und sollte ausgelassen werden.

Vorgehen/Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung wird von der Lehrerin vorgelesen und ggf. wiederholt bzw. erklärt. Bei dieser offenen Aufgabenstellung ist absichtlich keine Frage vorgegeben, die Problematik soll vom Kind erfasst und dann entsprechend bearbeitet werden.

Nun soll ein gezielter Impuls das Kind zu Reflexion und Vergleich mit eigenen Erfahrungen anregen. Dadurch soll es angeregt werden, seine Aussagen auf ihren Realitätsgehalt hin zu überprüfen.

Davon ausgehend erfolgt die Weiterentwicklung von Frage, Aufgabenstruktur und -bestandteilen sowie anschließend die Lösung der gewählten Fragestellungen. Die Strukturen sollen am Material und/oder durch Zeichnungen dargestellt werden.

» Ein Güterzug mit 6 Wagen (Waggons) hat 42 Autos geladen. [nach Fricke-Besuden 1989, in: Dröge 1992]

Direkt anschließend einen Impuls folgender Art geben:

» Hast du schon einmal einen mit Autos beladenen Güterzug gesehen?

Daran sollten sich Schilderungen individueller Erfahrungen des Kindes anschließen wie beispielsweise: „Meistens sind Autozüge viel länger./Ich habe schon einmal einen Autozug mit 12 Waggons gesehen./Die Autos stehen immer genau übereinander./Da stehen immer ganz viele Autos drauf, ganz eng."

Die Lehrerin soll nun günstige Schilderungen aufgreifen und ein Modell skizzieren (lassen) (s. Abb. 1 und 2). Es können zum nächsten Mal auch Bilder, Bücher oder Modellzüge vom Kind mitgebracht werden – wichtig ist, die Ideen und Erfahrungen des Kindes aufzugreifen und gemeinsam auszubauen.

Anschließend Vorschläge zur Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe sammeln (z. B. erstmal 6 leere Waggons malen).

Sofern die ‚erwartete' Lösung (7 Autos pro Waggon) ermittelt wird, sollte hier ein kognitiver Konflikt entstehen, z. B.: „Das geht ja gar nicht. Auf dem Doppeldecker müssen doch oben und unten immer gleich viele Autos sein."

Ansonsten wird weiter mit den Vorschlägen des Kindes gearbeitet und evtl. ein entsprechendes Lösungsmodell durch die Lehrerin angeboten:

» Sieh mal, so sieht das mit 7 Autos aus …

Da die Aufgabe jedoch sehr anspruchsvoll ist, genügt hier ein Operieren in Form von eigenen Verteilungen und Skizzen eines Autozuges. Die Autos können dann gezählt, die Teilmengen der Waggons und die Gesamtmenge ermittelt und in Beziehung gesetzt und evtl. Untersuchungen zum Halbieren und Verdoppeln angeschlossen werden.

Falls die Ursprungsaufgabe bearbeitet werden kann, folgt nun eine Modellbildung zur Aufgabenvorgabe:

» Versuche jetzt einen Autozug zu malen, der deiner Meinung nach zu der Aufgabe passt.

Hierzu gibt es unterschiedliche, vorwissensabhängige Lösungsmöglichkeiten, z. B.:

a) 6 Waggons mit je 7 Autos
b) 5 Waggons mit je 8 Autos, *aber* 2 Autos passen nicht mit drauf
c) 3 Waggons mit je 6 größeren Autos (z. B. Kombis) *und* 3 Waggons mit je 8 kleineren Autos (z. B. Kleinwagen)

Verschiedene Strategien

- Verteilen einer Gesamtmenge auf gleichmächtige Teilmengen (Vorbereitung der Division)
- *Ausprobieren:* mit Material oder anhand einer Skizze
- *Systematisch:* Verteilen anhand einer Skizze ausführlich (bildlich-konkret, s. Abb. 1) oder verkürzt (ikonisch, s. Abb. 2)
- *Rechnen:* schrittweise, annähernd, durch wiederholte Addition o. Ä., z. B.:

» Ich gebe erstmal jedem Waggon 2 Autos.

Überprüfung der entstandenen Summe – Bestimmung der Differenz zur vorgegebenen Gesamtmenge – weiteres Verteilen, Überprüfen etc.

Text- und Situationsverständnis:

» Wie viele Waggons hat der Zug? Wie viele Autos sind darauf geladen? Was bedeutet das? [Autos sind auf die Waggons zu verteilen]

» Kann das stimmen?

» Geht das? Oder wäre es anders besser?

» Kannst du die Aufgabe aufmalen?

» Wie würdest du es machen?

Vergleichen der Strategien

Vergleich unterschiedlicher Skizzen oder Rechenwege:

» Was ist anders/gleich?

Bewerten der Strategien

» Was ist günstiger?

» Womit kommst du am besten klar?

Abb. 1

Abb. 2

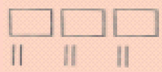


Abbildung 3.16: Aufgabenbeispiel I. Baustein 3.3 (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 3, 127)

3.3 Konzeptkomponenten und -prinzipien

Kalkulie ist eine Kombination bereichsspezifischer und darauf bezogener kognitiver, metakognitiver und volitional-motivationaler Förderung. Inhaltlich, didaktisch-methodisch und hinsichtlich metakognitiver und motivationaler Aspekte ist die Gestaltung der Förderung individuell zusammenzustellen (vgl. Abb. 3.17). Nachfolgend werden die einzelnen Prinzipien und Komponenten erläutert, indem sich jeweils an allgemeine Ausführungen und Begründungen die Beschreibung der konkreten Umsetzungen in Kalkulie anschließt.

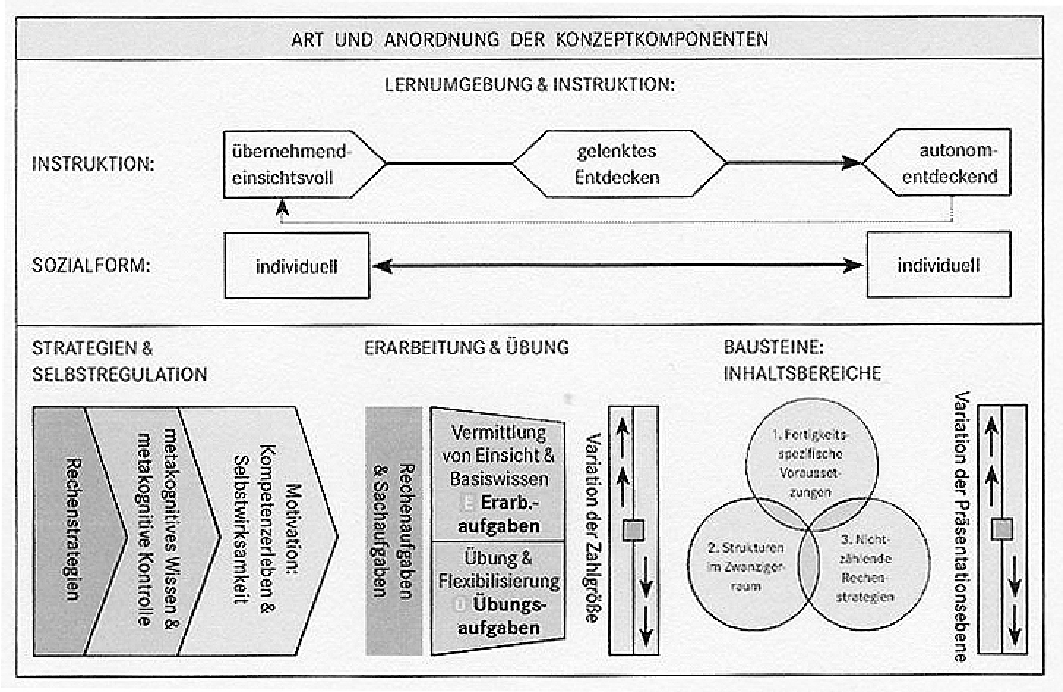


Abbildung 3.17: Kalkulie-Konzeptkomponenten (entnommen aus Gerlach et al. 2007, 25)

3.3.1 Diagnostik durch Lernstandserfassungen (LE)

Bevor Förderung sinnvoll stattfinden kann, müssen der individuelle Lernstand und bestehende Lücken erfasst werden. Allerdings kann Diagnostik den Lernstand lediglich beschreiben, so dass mögliche Förderziele nur „aus den Theorien, die dem Prozess der Aneignung zu Grunde liegen“ abgeleitet werden können (Fritz 2003, 287). Die drei Teile der Kalkulie-Lernstandserfassungen (LE) sind daher an die drei Förderbausteine und damit an das zu Grunde gelegte Entwicklungsmodell (vgl. 1.4.3.2) angepasst. Damit erlauben die LE Einsichten in Entwicklungszusammenhänge und dienen als Diagnoseinstrumente, die zum einen Hinweise auf Ansatzpunkte einer Förderung geben und die zum anderen durchgeführte Fördermaßnahmen zu evaluieren ermöglichen.

Mit diesem diagnostischen Material werden die Kompetenzen erfasst, die im Zeitrahmen vom Schulbeginn bis zum Ende des zweiten Schuljahres vorhanden sein sollen. Zur besseren Einschätzung so erhobener Kenntnisse wurden die LE standardisiert und normiert. Die dem inhaltlichen Aufbau des Förderkonzeptes entsprechend konzipierten bausteinbezogenen LE bestehen jeweils aus einem Lehrermanual mit Instruktionen und zusätzlichen Beobachtungs- und Auswertungshinweisen zum Strategieeinsatz der Kinder, Diagnoseheften, Auswertungsbögen und Material. Die Diagnosehefte für die Hand der Kinder liegen in den Pseudo-Parallelformen A und B vor, die sich in der Reihenfolge der Testaufgaben unterscheiden. Mit Diagnoseheft A wird der aktuelle Stand des

Kindes erhoben, mit Heft B wird die Leistung nach der durchgeführten Förderung überprüft (Prä- und Posttest). Alle Aufgaben sind als Papier-Bleistift-Versionen konzipiert. Die Aufgaben sind nach mündlich vorgegebenen Instruktionen schriftlich oder zeichnerisch zu beantworten. Die LE sind sowohl im Gruppen- als auch – optimalerweise – im Einzeltest einsetzbar.

Die LE beziehen sich den Förderbausteinen entsprechend auf bereichsspezifische Vorläuferfähigkeiten und die erste Integration von Zähl- und Mengenwissen (LE1), auf die Strukturierung des Zwanzigerraumes und den Aufbau arithmetisch gängiger, tragfähiger und anknüpfungsfähiger Zahl-, Zahlenraum- und Operationsvorstellungen (LE2) und auf nicht-zählende Rechenstrategien und die Automatisierung der Grundaufgaben des Kleinen 1+1 (LE3). In Kombination mit den individuellen Lerntagebüchern (vgl. 3.3.3.2) ergeben sich Verlaufskontrollen, die Aufschluss darüber geben, wo das Kind steht, wie weit ein bestimmter Inhalt erarbeitet ist und ob das ‚Mittel', also die Fördermaßnahme überhaupt in der beabsichtigten Form ‚wirkt'.

3.3.1.1 Theoretische Grundlagen

Mit engem Bezug zu den drei Bausteinen des Förderkonzeptes Kalkulie wurden drei Lernstandserfassungen (LE1-3) konzipiert, mit denen die einzelnen grundlegenden Teilfertigkeiten mathematischer Kompetenz und deren Zusammenwirken erfasst werden. Nachfolgend wird ein Überblick über die diagnostische Zielsetzung, den Einsatz, die theoretischen Grundlagen der Aufgabenkonstruktion, die Testentwicklung und die Gütekriterien gegeben. Außerdem werden die einzelnen Testaufgaben beschrieben.

Diagnostische Zielsetzung

Auf der Grundlage der in 1.4.3.2 dargestellten theoretischen Modelle und Begründungen für Entwicklungsabfolgen wurden unterschiedliche Anforderungen konstruiert. Damit soll die mathematische Kompetenz im Sinne grundlegender Einsichten und Fähigkeiten erfasst werden, um eine geeignete Basis für weiterführendes Mathematiklernen unterstützen zu können.

Mit den LE1-3 sollen Schwächen beim Erwerb grundlegender mathematischer Kompetenzen differenziert erfasst werden. Dabei werden die verschiedenen Teilbereiche mathematischer Kompetenz unterschieden. Der Einsatz der LE ermöglicht eine entwicklungsbezogene Interpretation der Fertigkeiten der untersuchten Kinder: In dem Verfahren sollen Teilfertigkeiten einzeln erfasst werden, um feststellen zu können, welche Fertigkeiten bereits entwickelt und welche Integrationsprozesse vollzogen sind. Damit soll geprüft werden, ob Teilfertigkeiten unverbunden und parallel oder ob diese in integrierter Form beherrscht werden. Dazu wurden Aufgaben konzipiert, die sowohl sehr differenziert einzelne Fertigkeiten als auch ‚zusammengesetzte' Fertigkeiten überprüfen, welche die Einzelfertigkeiten zu einer neuen, komplexeren Fertigkeit verbinden. So werden beispielsweise besonders Fertigkeiten der Mengenzerlegung jeweils auf den unterschiedlichen Niveaus (Teile-Ganzes-Schemata) überprüft. Diesen scheint eine Schlüsselrolle für die Entwicklung mathematischen Verständnisses zuzukommen: Fritz & Ricken (2005, 20ff) referieren überblicksartig aktuellere Untersuchungen, deren Befunde zumindest diese Hypothese stützen und erhärten.

Die LE können eingesetzt werden zum Zweck psychologischer oder pädagogischer Prüfung bei Rechenschwierigkeiten, zum Erstellen und Durchführen spezifischer Fördermaßnahmen mit dem Konzept Kalkulie und als Forschungsinstrumente. Sie dienen der differenzierten und detaillierten Diagnose grundlegender mathematischer Kompetenz sowie der individuellen Denkweisen und Strategien. Inhaltlich werden die geprüften Aspekte in der Regel vor und während der ersten beiden Schuljahre erworben. Da die LE jedoch die Schwierigkeiten von Kindern mit Rechenproblemen erfassen sollen und Schwierigkeiten bei unzureichend entwickelten mathematischen Kompetenzen bis in höhere Schulstufen hinein auftreten, ist ein Einsatz bei Bedarf über die ersten beiden Schuljahre hinaus möglich.

Aufgrund der Zielsetzung, Schwächen beim Erwerb mathematischer Kompetenzen zu erfassen, sind die Aufgabenanforderungen der LE darauf ausgelegt, vor allem im unteren Leistungsbereich zu differenzieren. Daher bewältigt die Mehrzahl der Kinder in der Schuleingangsstufe die Aufgaben mühelos. Ein umfassendes Nichtbewältigen der Aufgaben signalisiert also dementsprechend das Vorliegen massiver Schwierigkeiten.

Einsatz der Lernstandserfassungen

LE1 dient der Erfassung fertigkeitsspezifischer Voraussetzungen und elementarer numerischer Kompetenzen und kann kurz vor oder nach Schulbeginn eingesetzt werden. Weitere Normierungsdaten liegen für eine Durchführung Mitte und Ende des ersten Schuljahres vor (vgl. Tab. 3.2). Die damit überprüfbaren Fertigkeiten werden den Stufen 1 bis 3 und in An-

Tabelle 3.2: Testzeitpunkte der Kalkulie-Lernstandserfassungen (entnommen aus Fritz et al. 2007, 6)

	Schuleingang	1. Schuljahr		2. Schuljahr		3. Schuljahr	
		1. Hj.	2. Hj.	1. Hj.	2. Hj.	1. Hj.	2. Hj.
Diagnoseaufgaben Teil 1	x	x	x				
Diagnoseaufgaben Teil 2		x	x	x	x		
Diagnoseaufgaben Teil 3				x	x	x	x

sätzen 4 und 5 zugeordnet, so dass relevante Vorläuferfertigkeiten und erste Verbindungen von Mengen mit Zahlen in den Blick genommen werden können.

LE2 prüft die dem ersten Schuljahr zuzuordnende Verfügbarkeit über arithmetisch-didaktisch notwendige strukturierte Vorstellungen von Zahlen und Zahlenraum sowie das Verständnis von Zahlen im Sinne gegliederter Quantitäten. Da die hier erfassten Anforderungen zum Teil auch noch Stoff des zweiten Schuljahres sein können, sind weitere Normwerte für das zweite Schuljahr angegeben (vgl. Tab. 3.2). Die mit LE2 zu prüfenden Fertigkeiten werden Stufe 4 und zum Teil schon Stufe 5 zugeordnet.

LE3 nimmt elaboriertere Fertigkeiten in den Blick, die bis zum Ende des zweiten Schuljahres vorhanden sein sollten. Da jedoch vor allem der Stand entwicklungsverzögerter Kinder erfasst werden soll, liegen auch Normwerte für das dritte Schuljahr vor (vgl. Tab. 3.2). Mit den Aufgaben der LE3 wird die Verfügbarkeit über nicht-zählende Strategien geprüft. Damit lässt sich untersuchen, ob das Teile-Ganzes-Verständnis numerisch ist, ob bestimmte Zahl- und Operationsbeziehungen genutzt werden, ob zentrale Stützzahlen wie Fünfer und Zehner geschickt verwendet werden und ob die Grundaufgaben verständig automatisiert sind. Mit differenzierten Aufgaben zu Zerlegbarkeit von Zahlen, Kompensation, Kovarianz und Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben kann festgestellt werden, ob Fertigkeiten der Stufen 5 bis 7 vorhanden sind.

Theoretische Grundlagen der Aufgabenkonstruktion

Mit den LE soll keine curricular orientierte Überprüfung von Schulwissen erfolgen, sondern eine Überprüfung grundlegender bereichsspezifischer Einsichten und Kompetenzen auf der Grundlage der in 1.4.3.2 vorgestellten Theorie zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Damit stellen die LE ebenso wie die Förderaufgaben entwicklungsorientierte Zusammenstellungen von Aufgaben dar.

Die Testautoren gehen davon aus, dass die gewählten Aufgaben grundlegende Zahlbegriffkonzepte und basale Rechenoperationen repräsentieren, die sehr eng mit der weiteren Entwicklung mathematischer Kompetenzen korrelieren. Nach dem zugrunde gelegten Entwicklungsmodell (vgl. 1.4.3.2) entwickeln sich die verschiedenen Teilfertigkeiten zunächst unabhängig voneinander und erfüllen mit fortschreitender Entwicklung und Integration unterschiedliche Funktionen auf den einzelnen Stufen. Die LE prüfen diese Teilfertigkeiten sehr differenziert und kleinschrittig, da diese unabhängig voneinander beeinträchtigt sein können. Es wurde versucht, die Anforderungen so zu konstruieren, dass frühe Mengen- und Zahlkonzepte erfasst werden. Dabei wurde eine theoretisch angenommene hierarchische Ordnung der Teilkonzepte zugrunde gelegt. Damit kann festgestellt werden,

> „ob alle Bereiche gleichermaßen an der Entwicklung der Störung beteiligt sind oder ob besondere Fertigkeiten zu bestimmten Entwicklungszeitpunkten eine unterschiedliche Rolle spielen.“ (Fritz & Ricken 2005, 19).

Dieser entwicklungsorientierte Aufbau der LE repräsentiert also einzelne Abschnitte des Entwicklungsprozesses. Die Auswertung erlaubt damit Rückschlüsse auf erreichte Entwicklungsabschnitte. Aufgrund einer solchen diagnostischen Erfassung soll spezifischer Förderbedarf abgeleitet werden können.

Beschreibung der Aufgaben

Mit den Aufgaben aus **LE1** werden fertigkeitsspezifische Voraussetzungen und elementare numerische Kompetenzen vor Schulbeginn und im ersten Schuljahr erfasst (vgl. Tab. 3.3). Die damit überprüfbaren Fertigkeiten werden den Stufen 1 bis 3 und in Ansätzen Stufe 4 und 5 zugeordnet. Damit werden hier relevante Vorläuferfertigkeiten und erste Verbindungen von Mengen mit Zahlen in den Blick genommen. Die Aufgaben stellen jeweils eigene, nachfolgend erläuterte inhaltliche Schwerpunkte dar.

Tabelle 3.3: Diagnoseaufgaben Lernstandserfassung 1 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 16)

	Aufgabe	Anzahl
1	Kreise dazumalen – Mengenvergleich; gleichmächtige Mengen erzeugen	4
2	Zählen – Zahlwortsequenz	6
3	Größer oder kleiner? – Zahlvergleich	6
4	Welches Bild passt? – Teile-Ganzes-Konzept und Situationssequenzen	4
5	Punkte einkreisen – Objekte zählen; Abzählen	3
6	Wie viele zusammen? – Teile-Ganzes-Konzept	6
7	Wie passt es? – Zählzahl und Anzahl, Punktmengen und Zahlen	4
8	Ergänzen – Teile-Ganzes-Konzept	6
9	Weiterzählen – Zahlrelationen	4

LE1 1. Kreise dazumalen – Mengenvergleich; gleichmächtige Mengen erzeugen

Mit diesen Aufgaben wird geprüft, ob das Kind zwei Mengen anzahlmäßig gleichmächtig machen kann. Dabei ist insbesondere zu überprüfen, ob das Kind dazu pränumerische Strategien der 1-zu-1-Zuordnung (auch mithilfe der Finger; Stufe 1) oder ob es bereits numerische Zählstrategien einsetzt (Stufe 2).

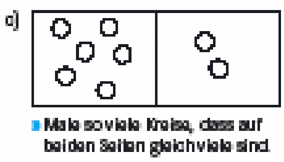


Abbildung 3.18: LE1 Aufgabe 1 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 17)

LE1 2. Zählen – Zahlwortsequenz

Hier wird überprüft, ob die Zahlwortsequenz korrekt verinnerlicht ist. Dazu müssen korrekte und falsche Zahlwortsequenzen erkannt werden. Diese Anforderung ist bei den Zahlwortreihen, die bei 1 beginnen, noch auf der Ebene rein auswendig gelernter Zahlwortreihen lösbar (Stufe 1). Bei den Zahlwortreihen, die nicht bei 1 beginnen, sind elaboriertere Kompetenzen und Strategien notwendig (Stufe 3).

LE1 3. Größer oder kleiner? – Zahlvergleich

Hier wird geprüft, ob die Ordnung der Zahlreihe verstanden wird: „Welche Zahl ist größer: Die 4 oder die 5?“. Dabei sollen insbesondere zugrunde liegende Vorstellungen untersucht werden: Dazu ist zu überprüfen, ob das Kind primär *Mengen*vorstellungen (ist mehr; Stufe 3) oder *Zahlenstrahl*vorstellungen (Rangfolge; kommt danach; Stufe 2) besitzt. Haben die Bezeichnungen ‚größer’ und ‚kleiner’ *Bedeutungen* für das Kind? Ist ein Bereich eventuell schwieriger als der andere (ist z.B. ‚größer’ einfacher als ‚kleiner’)? Eine weitere Überprüfung kann durch Zusatzfragen erfolgen wie: „Woher weißt du, dass diese Zahl größer (kleiner) ist?“

LE1 4. Welches Bild passt? – Teile-Ganzes-Konzept & Situationssequenzen

Diese Aufgabe setzt erste kardinale Vorstellungen voraus: Eine Menge bleibt dann gleich, wenn die Anzahl der einzelnen Elemente gleich bleibt (die Menge ist aus einer bestimmten Anzahl an Einzelelementen zusammengesetzt). Der Teile-Ganzes-Begriff kann hier noch pränumerisch sein: Das Kind muss nur über das Wissen verfügen, dass ein Ganzes aus Teilen zusammengesetzt wird und dass dazwischen bestimmte Beziehungen bestehen. Es kann die Bauklötze auf dem ersten Bild und den zugehörigen nachfolgenden Bildern auf gleiche Anzahl überprüfen, indem es jedem Element ein anderes Element zuordnet (Stufe 1) oder indem es die Mengen auszählt und miteinander vergleicht (Stufe 2).

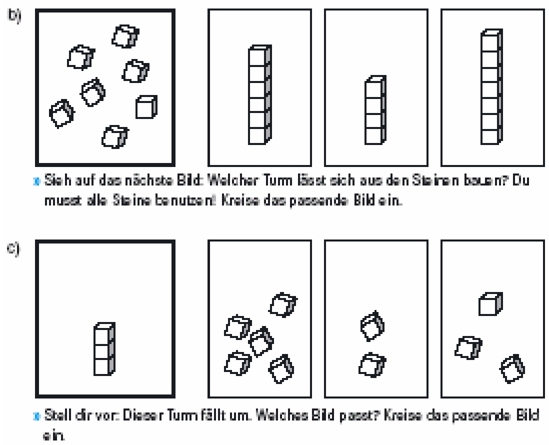


Abbildung 3.19: LE1 Aufgabe 4 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 18)

LE1 5. Punkte einkreisen – Objekte zählen; Abzählen

Das *Aus*zählen wird zum *Ab*zählen erweitert, wenn ein Kind von beliebigen Zahlen weiterzählen sowie bis zu bestimmten Zahlen zählen kann: Ein vorgegebenes Zahlwort mit kardinaler Bedeutung („Gib mir vier Bonbons.“) kann in entsprechende Zählhandlungen umgesetzt werden; eine entsprechende Teilmenge kann so aus einer größeren

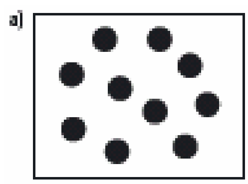


Abbildung 3.20: LE1 Aufgabe 5 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 19)

Menge heraus abgezählt werden (Stufe 3). Dieses erste Teilmengenverständnis bedeutet allerdings noch nicht, dass verstanden wird, dass Zahlen ihre Vorgänger beinhalten.

LE1 6. Wie viele zusammen? – Teile-Ganzes-Konzept

Hier wird überprüft, ob das Kind über protoquantitatives Wissen über Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen verfügt und ob es zwei Teilmengen zusammen auszählen kann (Stufe 3).

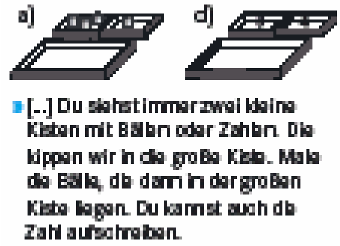


Abbildung 3.21: LE1 Aufgabe 6 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 19)

LE1 7. Wie passt es? – Zählzahl und Anzahl, Punktmengen und Zahlen

Hier soll überprüft werden, ob das Kind sicher die Anzahl einer Menge bestimmen und mit der Ziffer abgleichen kann. Dabei muss das Kind bei nicht zueinander passenden Punktmengen und Ziffern entweder die Punktmenge oder die Ziffer entsprechend anpassen. Es geht also um korrekte Verbindungen von Zahl und Menge (Stufe 3).

Abbildung 3.22: LE1 Aufgabe 7 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 19)

LE1 8. Ergänzen – Teile-Ganzes-Konzept

Mit dieser Aufgabe wird überprüft, ob das Teile-Ganzes-Konzept auf quantifizierter Ebene im Umgang mit Mengen sowie im Umgang mit Ziffern verstanden ist. Dazu gehört die Einsicht, dass jede Anzahl ihren Vorgänger beinhaltet und unterschiedlich aus kleineren Anzahlen zusammengesetzt werden kann (Stufe 5).

Abbildung 3.23: LE1 Aufgabe 8 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 20)

LE1 9. Zahlrelationen: Weiterzählen

Das Weiterzählen um eine bestimmte Anzahl erfordert einen relationalen Zahlbegriff. Dazu gehört die Einsicht, dass eine Zahl sowohl eine Menge von Objekten als auch die Anzahl der benötigten Zählschritte angibt. Dies macht die Zahlreihe selbst zählbar. So steht ‚3' beispielsweise nicht nur für die Sequenz oder Menge ‚1-2-3', sondern kann ebenso den Abstand ‚3' zwischen 5 und 8 repräsentieren ebenso wie zwischen 12 und 15 etc. (Stufe 4). Diese Einsicht wird u.a. mit Aufgaben folgender Art überprüft: „Zähle von 9 aus um 5 weiter. Bei welcher Zahl kommst du an?; Zähle von 11 um 4 zurück. Bei welcher Zahl kommst du an?"

Tabelle 3.4: Diagnoseaufgaben Lernstandserfassung 2 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 21)

	Aufgabe	Anzahl
1	Mengen ordnen	4
2	Wie viele? – Anzahlen am Material	5
3	Welche Zahl? – Positionen am Material	4
4	Zahlen suchen – 5er- und 10er-Strukturen nutzen	6
5	Zahlenstrahl – Zahlbeziehungen und Bewegungen	4
6	Kopfrechnen	6

Die **LE2** prüft die Verfügbarkeit über arithmetisch-didaktisch notwendige strukturierte Vorstellungen von Zahlen und Zahlenraum. Außerdem wird das Verständnis von Zahlen im Sinne gegliederter Quantitäten erfasst. Diese Einsichten und Kenntnisse sollte das Kind im ersten Schuljahr entwickelt haben. Die mit LE2 geprüften Fertigkeiten und Kenntnisse werden überwiegend Stufe 4 und zum Teil Stufe 5 zugeordnet. LE2 besteht aus nachfolgend erläuterten Aufgaben (vgl. Tab. 3.4).

LE2 1. Mengen ordnen

Mit dieser Aufgabe soll überprüft werden, ob das Kind selbstständig Strukturierungsmöglichkeiten für Mengen finden und gestalten kann. Folgende Möglichkeiten werden als (arithmetisch) *sinnvolle* Strukturierungen gewertet:

Anordnung: *Reihen* mit Fünferzäsur; Zweier-, Dreier- und Fünfer*gruppen*.

Farbe: Farbwechsel nach Fünfer- oder Zehner-Portionen.

Die Strukturierung von Mengen ist notwendig für den Aufbau eines strukturierten Zahlenraumes, von Zahlvorstellungen im Sinne gegliederter Mengen und für die einsichtsvolle Entwicklung tragfähiger Rechenstrategien. Die Überprüfung erfolgt mit Aufgaben folgender Art: „Male 7 Punkte so auf, dass man gut erkennen kann, wie viele es sind.“

LE2 2. Wie viele? – Anzahlen am Material

Diese Aufgabe dient der Überprüfung von Verständnis und Nutzbarkeit arithmetisch üblicher Strukturen didaktischen Materials bezogen auf Anzahlen (Fünfer- und Zehnerstrukturen in Feld und Reihe). Ohne das Verständnis von Zahlen als gegliederten Quantitäten ist diese Aufgabe nur rein zählend lösbar. Aufgrund der zeitlich begrenzten Präsentation des Materials ist Zählen jedoch nicht möglich, so dass Schwierigkeiten an dieser Stelle auf entsprechende Defizite deuten.

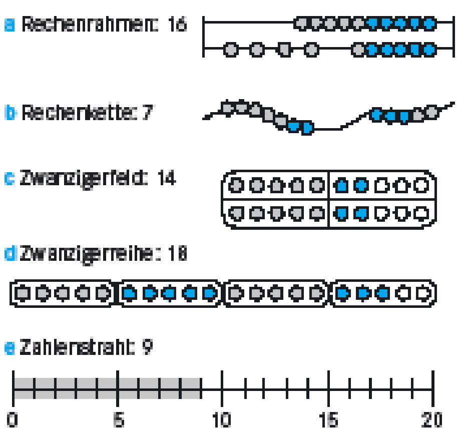


Abbildung 3.24: LE2 Aufgabe 2 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 22)

LE2 3. Welche Zahl? – Positionen am Material

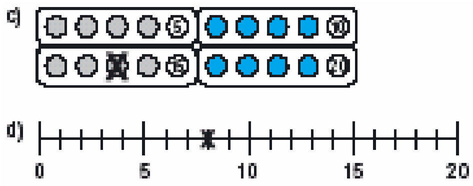


Abbildung 3.25: LE2 Aufgabe 3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 22)

Hier geht es um Verständnis und Nutzbarkeit arithmetisch üblicher Strukturen didaktischen Materials bezogen auf Zahlpositionen (Fünfer- und Zehnerstrukturen in Feld und Reihe). Es soll geprüft werden, ob sich das Kind schnell und sicher orientieren kann. Dazu muss es die Strukturen und die Nachbarzahlen nutzen. Aufgrund der zeitlich begrenzten Präsentation des Materials ist Zählen nicht möglich.

LE2 4. Zahlen suchen – 5er- & 10er-Strukturen nutzen

Bei dieser Aufgabe geht es darum zu prüfen, inwieweit die Kinder Fünfer- und Zehnerstrukturen in Feld und Reihe schnell und sicher nutzen können. Aufgrund der zeitlich begrenzten Präsentation des Materials ist reines Zählen nicht möglich, so dass Schwierigkeiten an dieser Stelle auf entsprechende Defizite deuten. Die Überprüfung erfolgt mit Aufgaben folgender Art: „Gleich siehst du weniger als 10 Punkte. Wie viele fehlen bis zur 10? – Gleich siehst du mehr als 5 Punkte. Wie viele sind es mehr als 5?"

LE2 5. Zahlenstrahl – Zahlbeziehungen und Bewegungen

Hier geht es darum, Zahlenstrahl-Strukturen bezogen auf Zahlpositionen (Fünfer- und Zehnerstrukturen) schnell und sicher zu nutzen. Es wird geprüft, ob das Kind Zahlbeziehungen wie „kommt vor" oder „ist um 2 kleiner als" verstehen kann. Dazu muss es die Strukturen und die Nachbarzahlen nutzen. Es werden Aufgaben folgender Art gestellt: „Gesucht wird die Zahl, die nach dieser Zahl [am Zahlenstahl auf 6 zeigen] kommt."

LE2 6. Kopfrechnen

Mit dieser Aufgabe wird geprüft, inwieweit das Kind Additions- und Subtraktions-Kopfrechenaufgaben schnell und sicher lösen kann. Die Aufgaben werden in unterschiedlichen Formaten präsentiert, die ein Teile-Ganzes-Verständnis voraussetzen. Bei den Subtraktionsaufgaben kann zwischen Ergänzung und Unterschiedsbedeutung unterschieden werden. Durch Nachfragen und Modellierung mit Material kann zusätzlich überprüft werden, inwiefern strukturierte Vorstellungen für die Lösung genutzt werden. Die Überprüfung erfolgt mit Aufgaben folgender Art: „Auf dem Tisch liegen 8 Plättchen. Ich lege noch 5 Plättchen dazu. Wie viele Plättchen liegen insgesamt auf dem Tisch?"

Die **LE3** nimmt entwickeltere Fertigkeiten des ersten bis zweiten Schuljahres in den Blick. Es wird vor allem die Verfügbarkeit nicht-zählender Rechenstrategien sowie das numerische Teile-Ganzes-Verständnis erfasst. Mit der LE3 kann also überprüft werden, ob bestimmte Zahl- und Operationsbeziehungen genutzt werden, ob zentrale Stützzahlen wie Fünfer und Zehner geschickt gebraucht werden und ob die Grundaufgaben des Kleinen 1+1 verständig automatisiert sind. Mit differenzierten Aufgaben zu Zerlegbarkeit von Zahlen, Kompensation, Kovarianz und komplexen Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Aufgaben kann festgestellt werden, ob ein tieferes Verständnis der Stufen 5 bis 7 vorhanden ist. LE3 besteht aus nachfolgend erläuterten Aufgaben (vgl. Tab. 3.5).

Tabelle 3.5: Diagnoseaufgaben Lernstandserfassung 3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 24)

	Aufgabe	Anzahl
1	Immer 5 – Kraft der 5 (Bündelung)	4
2	Rechnen mit der 10 – Kraft der 10	4
3	Verdoppeln und Halbieren – Das Ganze in Teilmengen zerlegen	4
4	Umkehraufgaben – Kompensation	4
5	Gegensinniges Verändern – Kompensation bei der Addition	4
6	Gleichsinniges Verändern – Kompensation bei der Subtraktion	4
7	Nachbaraufgaben – Kovarianz	4
8	Zahlenmauern – Beziehungen zwischen Aufgaben	6
9	Rechendreiecke – Beziehungen zwischen Aufgaben	

LE3 1. Immer 5 – Kraft der 5 (Bündelung)

Das hier erforderliche Zusammensetzen von Zahlen aus Fünferportionen und einem Rest überprüft, inwiefern Zahlen wahrgenommen werden können als gegliederte Quantitäten – hier als Spezialfall der Fünfergliederung (Stufe 5).

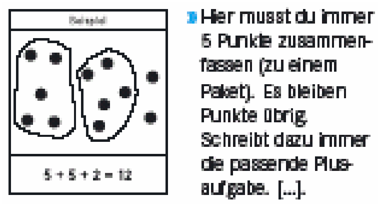


Abbildung 3.26: LE3 Aufgabe 1 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 25)

LE3 2. Rechnen mit der 10 – Kraft der 10

Das hier erforderliche Zusammensetzen von Zahlen aus Zehnerportionen und einem Rest bzw. das Zerlegen einer Zahl in 10 und einen Rest überprüft, inwiefern Zahlen als gegliederte Quantitäten wahrgenommen werden können – hier als Spezialfall der Zehnergliederung. Es werden Aufgaben zur Addition, Subtraktion und zum Ergänzen mit 10 vorgegeben (Stufe 5.)

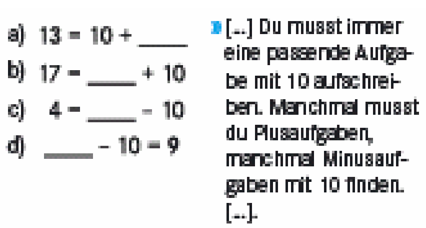


Abbildung 3.27: LE3 Aufgabe 2 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 25)

LE3 3. Verdoppeln und Halbieren – Das Ganze in Teilmengen zerlegen

Diese Aufgabe dient der Überprüfung des Verständnisses von ‚Doppeltem' und ‚Hälfte'. Verdoppeln und Halbieren stellen besondere Formen der Zerlegung eines Ganzen in seine Teile bzw. umgekehrt dar (Stufe 5).

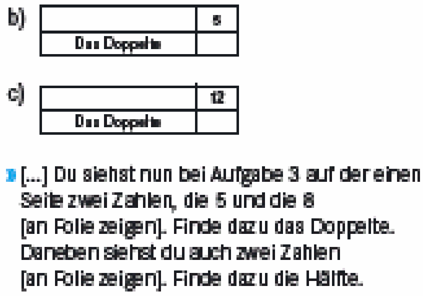


Abbildung 3.28: LE3 Aufgabe 3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 25)

LE3 4. Umkehraufgaben

Hier wird das Verständnis der Auswirkungen kompensierender Beziehungen zwischen Aufgaben überprüft: Das Ganze und seine Teile bleiben erhalten – die Triade ‚Teil – Teil – Ganzes' tritt nur in unterschiedliche Beziehungen zueinander. Diese dynamischen Zusammenhänge sollen verstanden werden (Stufe 6-7).

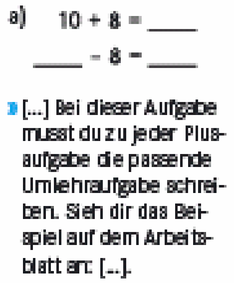


Abbildung 3.29: LE3 Aufgabe 4 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 26)

LE3 5. Gegensinniges Verändern – Kompensation bei der Addition

Mit dieser Aufgabe wird das Verständnis der Auswirkungen kompensierender Rechenoperationen überprüft: Das Ganze bleibt hier trotz Veränderungen an den Teilen erhalten, da sich die Veränderungen kompensieren (was einem Teil weggenommen wird, wird dem anderen wieder hinzugefügt) (Stufe 6).

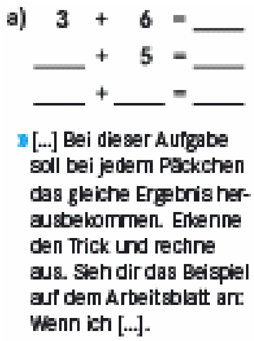


Abbildung 3.30: LE3 Aufgabe 5 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 26)

LE3 6. Gleichsinniges Verändern – Kompensation bei der Subtraktion

Hier wird das Verständnis der Auswirkungen kompensierender Rechenoperationen geprüft: Die Differenz bleibt hier trotz Veränderungen an den Teilen erhalten, da sich die Veränderungen kompensieren (was einem Teil weggenommen wird, wird auch dem anderen weggenommen) (Stufe 6).

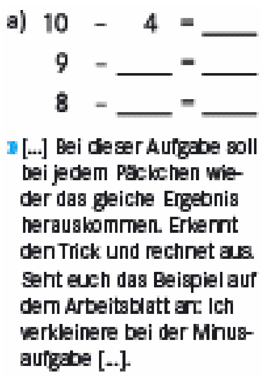


Abbildung 3.31: LE3 Aufgabe 6 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 26)

LE3 7. Nachbaraufgaben – Kovarianz

Mit dieser Aufgabe wird überprüft, ob Auswirkungen auf das Ganze von vermehrenden oder vermindernden Veränderungen an einem Teil verstanden werden: Vermindert man bei Additionsaufgaben einen Teil, verkleinert sich das Ganze entsprechend, vergrößert man einen Teil, vergrößert sich das Ganze. Vermindert man bei Subtraktionsaufgaben den Minuenden, vermindert sich die Differenz entsprechend und umgekehrt. Vermindert man bei Subtraktionsaufgaben den Subtrahenden, vergrößert sich die Differenz entsprechend und umgekehrt. Veränderungen um 1 führen dabei zu Nachbaraufgaben (Stufe 6).

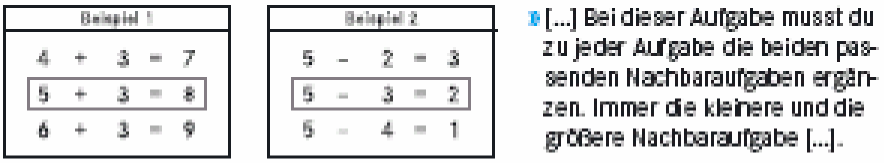


Abbildung 3.32: LE3 Aufgabe 7 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 27)

LE3 8. Zahlenmauern – Beziehungen zwischen Aufgaben

Über grundlegende Teile-Ganzes-Beziehungen sowie über kompensierende und kovariierende Effekte von Veränderungen an Teilmengen hinaus müssen hier Beziehungen zwischen mehreren voneinander abhängigen Aufgaben berücksichtigt werden: Gesamt- und Teilmengen stehen zueinander in Beziehung und bedingen sich gegenseitig. Dies erfordert Einsicht in Zahl- und Aufgabenbeziehungen und in Zahlstrukturen (z.B. alle Zusammensetzungen der 6 kennen) (Stufe 7). Aufgabe 8 und 9 werden auf dem Auswertungsbogen zu einem Gesamtwert zusammengefasst.

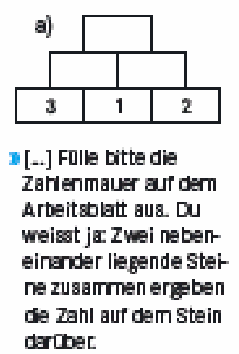


Abbildung 3.33: LE3 Aufgabe 8 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 27)

LE3 9. Rechendreiecke – Beziehungen zwischen Aufgaben

Über grundlegende Teile-Ganzes-Beziehungen sowie über kompensierende und kovariierende Effekte von Veränderungen an Teilmengen hinaus müssen hier Beziehungen zwischen mehreren voneinander abhängigen Aufgaben berücksichtigt werden: Gesamt- und Teilmengen stehen zueinander in Beziehung und be-

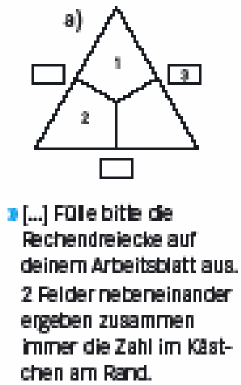


Abbildung 3.34: LE3 Aufgabe 9 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 27)

dingen sich gegenseitig. Dies erfordert Einsicht in Zahl- und Aufgabenbeziehungen und in Zahlstrukturen (z.B. alle Zusammensetzungen der 6 kennen) (Stufe 7). Aufgabe 8 und 9 werden bei der Auswertung zu einem Gesamtwert zusammengefasst.

Testentwicklung und Gütekriterien

Die LE wurden über einen Zeitraum von zwei Jahren entwickelt und in umfangreichen Vorstudien in Zusammenarbeit mit Lehrergruppen aus verschiedenen Bundesländern mehrfach überarbeitet. Die Testaufgaben wurden in qualitativer und quantitativer Hinsicht geprüft. Auf qualitativer Ebene wurden Angemessenheit, Verständlichkeit und Umsetzbarkeit der Aufgaben mit den Lehrern der Evaluations-Gruppen kritisch analysiert. Auf quantitativer Ebene wurde die Schwierigkeit der Aufgaben ermittelt, so dass zu einfache und zu schwierige verworfen werden konnten.

Auf dieser Grundlage wurde das umfangreiche Diagnosematerial auf die oben vorgestellten Aufgaben der drei LE reduziert. Die Aufgaben wurden qualitativ analysiert und hinsichtlich der Gütekriterien geprüft (vgl. zu den nachfolgenden Ausführungen Fritz et al. 2007, 28ff.).

Aufgabenanalyse

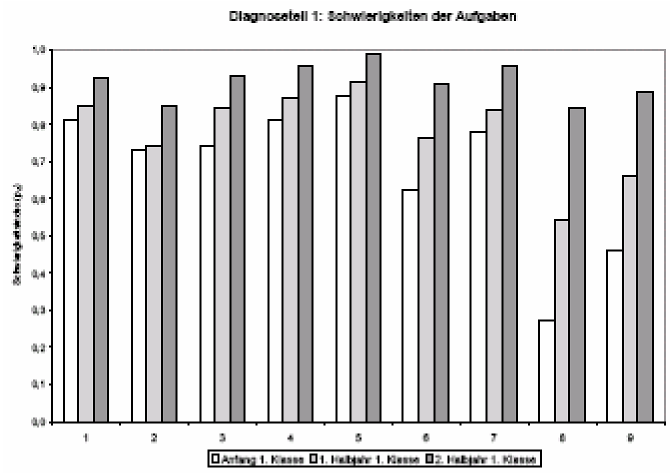
Da mit den LE im Sinne eines Screenings insbesondere Kinder mit umfassenden Schwierigkeiten beim Rechnenlernen erfasst werden sollen, wurden Aufgaben ausgewählt, die der Mehrzahl der Kinder leicht fallen. Auf diese Weise können gravierende Entwicklungsrückstände erkannt werden.

Um diejenigen Aufgaben aus dem ursprünglichen Diagnosematerial aussortieren zu können, die zu nicht ausreichend verwertbaren diagnostischen Informationen führen, wurden u.a. die Schwierigkeiten der Aufgaben geprüft. Die Schwierigkeit einer Aufgabe gibt an, wie viel Prozent der Kinder einer Stichprobe diese Aufgabe richtig gelöst haben. Dieser Wert wurde für die einzelnen Aufgaben (s. in Fritz et al. 2007) und für die Aufgabengruppen berechnet. Nachfolgend sollen hier nur die gemittelten Schwierigkeiten der Aufgabengruppen für die drei LE vorgestellt werden.

Aus der Tabelle 3.6 für die Aufgaben der **LE1** ist ersichtlich, dass die Leistungen der Kinder über die drei Messzeitpunkte hinweg deutlich ansteigen, also Alterseffekte vorliegen. Das bedeutet, dass die Aufgaben am Ende des 1. Schuljahres schon sehr leicht sind. Zum ersten und zweiten Messzeitpunkt allerdings sind die Aufgaben schwieriger. Insbesondere Aufgabe 8 und 9 bereiten sehr vielen Kindern Probleme:

Bei Schulbeginn lösen 27% der Kinder Aufgabe 8 und 46% Aufgabe 9, nach dem ersten Schulhalbjahr wird Aufgabe 8 von 54% und Aufgabe 9 von 66% der Kinder gelöst. Die damit erhobenen Kompetenzen zu komplexeren Teile-Ganzes-Einsichten und zum relationalen Zahlbegriff der Stufen 4 und 5 entwickeln sich danach bei vielen Kindern im Verlauf des ersten Schuljahres und sind am Ende bei den meisten verfügbar. Niedrige Punktzahlen bei diesen Aufgaben sind daher nicht als Alarmsignal zu werten. Wohl aber niedrige Werte bei den übrigen, von den meisten Kindern leicht zu bewältigenden Aufgaben.

Tabelle 3.6: Schwierigkeiten der Aufgaben – LE1 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 29)



Auch Tabelle 3.7 für die Aufgabenschwierigkeiten in **LE2** zeigt deutliche Alterseffekte. Die Aufgabengruppen 2, 4, 5 und 6 werden von 82 bis 99% der Kinder am Ende des 2. Schuljahres gelöst. Die mittleren Lösungshäufigkeiten für die Aufgaben 1 und 3 selbst der ältesten Kinder können darauf zurückzuführen sein, dass zum Teil unbekannte Anforderungen gestellt werden (Aufgabe 1) oder dass Veranschaulichungen räumlich weniger gut unterscheidbar sind als bei anderen Aufgaben (Aufgabe 3).

Tabelle 3.7: Schwierigkeiten der Aufgaben – LE2 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 30)

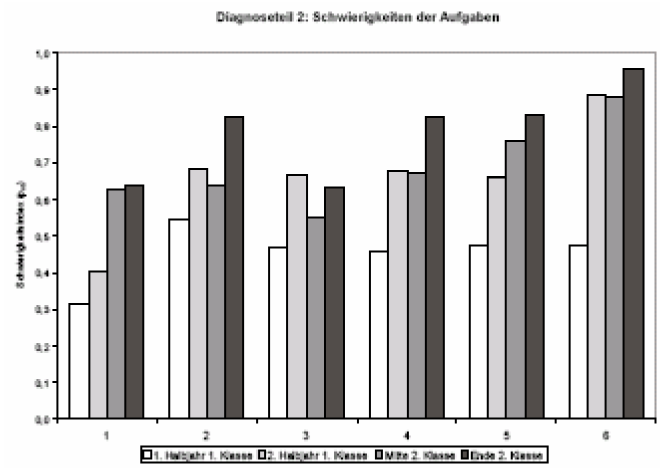
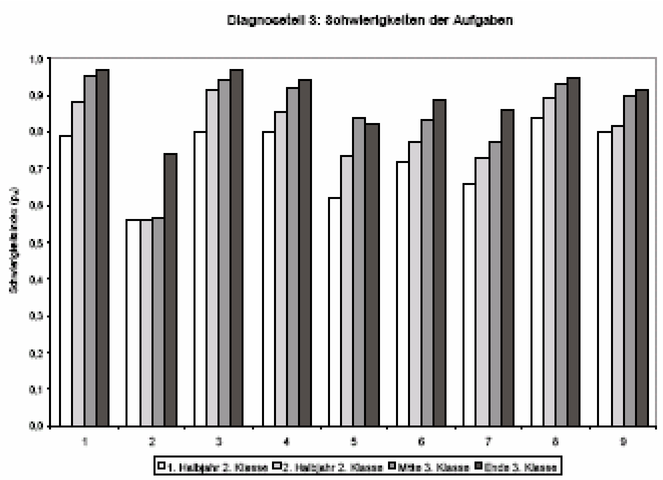


Tabelle 3.8: Schwierigkeiten der Aufgaben – LE3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 31)

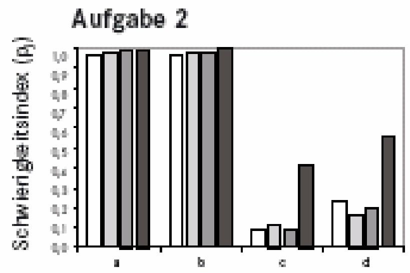


Auch die Aufgabenschwierigkeiten für **LE3** zeigen deutliche

Alterseffekte (vgl. Tab. 3.8). Obwohl nach dem ersten Schulhalbjahr in Klasse 2 die Aufgaben 2, 5, 6 und 7 nur von etwas mehr als der Hälfte der Kinder gelöst werden können, eignet sich der Test insgesamt für den Einsatz schon zu diesem Zeitpunkt. Die Probleme der Kinder mit diesen Aufgaben können zum einen auf die Komplexität der Aufgaben und zum anderen auf den größeren Zahlenraum zurückzuführen sein.

Besonders interessant ist hier die Aufschlüsselung der Schwierigkeiten der Aufgabengruppe 2 für die Items (vgl. Tab. 3.9 und Abb. 3.35): Hier sind nicht alle Items gleich oder ähnlich schwierig. Bei diesen Aufgaben ist gefordert, eine Zahl in eine Zehnerportion und den entsprechenden Rest zu zerlegen. Diese Anforderung wird bewältigt, solange nur eine Teilmenge gesucht wird. Bei den Subtraktionsaufgaben, bei denen die Gesamtmenge als Minuend gesucht ist, wird diese Anforderung kaum noch bewältigt. Daraus kann geschlossen werden, dass das Teile-Ganzes-Verständnis noch nicht ausreichend elaboriert und insbesondere die Beziehungen zwischen Addition und Subtraktion noch nicht vollständig durchdrungen sind (vgl. 1.4.3.2). Dies gilt für die meisten Kinder bis in die zweite Hälfte des dritten Schuljahres und für viele Kinder sogar noch am Ende des dritten Schuljahres. Dies ist ein Beleg für die herausragende Bedeutung der Entwicklung eines tragfähigen numerischen Teile-Ganzes-Verständnisses.

Tabelle 3.9: Schwierigkeiten der Items in Aufgabe 2 – LE3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 44)



a) 13 = 10 + ____
b) 17 = ____ + 10
c) 4 = ____ - 10
d) ____ - 10 = 9

[...] Du musst immer eine passende Aufgabe mit 10 aufschreiben. Manchmal musst du Plusaufgaben, manchmal Minusaufgaben mit 10 finden. [...].

Abbildung 3.35: LE3 Aufgabe 2 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 25)

<u>Validität</u>

Im Rahmen der Entwicklung des Diagnosematerials wurden unterschiedliche Validitätsuntersuchungen durchgeführt.

Um *regionale Effekte* zu kontrollieren wurde eine nordrhein-westfälische (N=149) mit einer thüringischen Stichprobe (N=74) mit ähnlichen sozioökonomischen Bedingungen zum ersten Messzeitpunkt verglichen. Signifikante Unterschiede ergaben sich weder für die mittleren Leistungen im Gesamtpunktwert noch bei den Quartilgrenzen.

Zur *Validierung* der LE1 an einem anderen Verfahren wurde ein Teil der Stichprobe auch mit dem **OTZ** (vgl. 2.3.2) getestet, so dass diese Ergebnisse miteinander korreliert werden konnten. LE1 und OTZ wurden zum zweiten Messzeitpunkt in der Mitte der 1. Klasse eingesetzt. Da der OTZ als Einzeltest konzipiert ist, umfasste die Validitätsprüfungs-Stichprobe N=32 Kinder in ausgewogenem Geschlechterverhältnis im Alter von 6;10 Jahren. Wie in 2.3.2 dargestellt, beziehen sich die ersten vier Aufgabenbereiche des OTZ auf pränumerische protoquantitative Zahlbegriffsaspekte. Die übrigen Bereiche setzen bereits einen entwickelten Kardinalzahlbegriff und Einsichten in Teile-Ganzes-Aspekte ähnlich den Anforderungen von Aufgabe 8 und 9 in LE1 voraus. Der Zahlenraum des OTZ ist größer als der der LE1. Aufgrund der Ähnlichkeiten in der Testkonstruktion und aufgrund der höheren Schwierigkeit des OTZ war die Korrelation für die Summenwerte beider Verfahren erwartungsgemäß mittelhoch und betrug r=.65. Damit liegt die Vermutung nahe, dass beide Verfahren ähnliche Konstrukte messen.

Reliabilität

Um die Zuverlässigkeit der LE zu prüfen, wurde die interne Konsistenz der Aufgaben als Korrelation aller Aufgaben miteinander bestimmt. Daraus wird ersichtlich, in welcher Weise die Items die gleichen Fähigkeiten messen. In Tabelle 3.10 sind die Reliabilitätswerte für alle drei LE und alle Messzeitpunkte dargestellt. Aufgrund der geringen Itemanzahl wurde Cronbachs α jeweils für den Gesamttest bestimmt. Insgesamt sind diese Werte zufrieden stellend.

Tabelle 3.10: Reliabilität für LE1-3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 37)

Diagnose-aufgaben	Messzeitpunkt	Cronbachs α
Teil 1	Anfang 1. Klasse	.87
	1. Halbjahr 1. Klasse (Ende)	.89
	2. Halbjahr 1. Klasse (Ende)	.77
Teil 2	1. Halbjahr 1. Klasse	.81
	2. Halbjahr 1. Klasse	.82
	Mitte 2. Klasse	.82
	2. Halbjahr 2. Klasse	.81
Teil 3	1. Halbjahr 2. Klasse (Ende)	.89
	2. Halbjahr 2. Klasse (Ende)	.82
	1. Halbjahr 3. Klasse (Ende)	.85
	2. Halbjahr 3. Klasse (Ende	.79

Normierung

Um den Lehrern ein Bezugssystem zur Einordnung der Testergebnisse zu geben, wurden die LE normiert. Die Daten wurden in verschiedenen Schulen von zwei studentischen Projektmitarbeiterinnen erhoben, die auch die Daten in die Datenmaske eingaben, so dass in Durchführung und Auswertung Einheitlichkeit vorausgesetzt werden kann. Analyse und Normierung wurden an einer Stichprobe mit N=2513 Kindern aus 1., 2. und 3. Schuljahren vorgenommen. Die Verteilung der Kinder auf die drei LE und die Messzeitpunkte können Tabelle 3.11 entnommen werden.

Die erste Erhebung fand wenige Tage nach der Einschulung statt, die weiteren jeweils zum Schulhalbjahr im Dezember / Januar und Schuljahresende Ende Mai bis Anfang Juli. Insgesamt fanden die Untersuchungen im Zeitraum von Mai 2005 bis Januar 2007 statt.

Tabelle 3.11: Normierungsstichprobe und Messzeitpunkte LE1-3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 38f.)

Diagnoseaufgaben	Stichprobe		Anzahl	Alter in Monaten Mittelwert	Streuung
Teil 1	Anfang 1. Klasse	Mädchen	75		
		Jungen	74		
		Gesamt	149	79,1	3,9
	1. Halbjahr 1. Klasse	Mädchen	124		
		Jungen	143		
		Gesamt	267	81,8	4,1
	2. Halbjahr 1. Klasse	Mädchen	152		
		Jungen	108		
		Gesamt	260	88,4	3,9
Teil 2	1. Halbjahr 1. Klasse	Mädchen	68		
		Jungen	83		
		Gesamt	151	82	4,1
	2. Halbjahr 1. Klasse	Mädchen	151		
		Jungen	158		
		Gesamt	309	88	4
	Mitte 2. Klasse	Mädchen	79		
		Jungen	75		
		Gesamt	154	93	4
	Ende 2. Klasse	Mädchen	102		
		Jungen	77		
		Gesamt	179	103,6	4,1
Teil 3	1. Halbjahr 2. Klasse	Mädchen	193		
		Jungen	183		
		Gesamt	376	94,3	4,2
	2. Halbjahr 2. Klasse	Mädchen	116		
		Jungen	124		
		Gesamt	240	100,7	3,9
	Mitte 3. Klasse	Mädchen	130		
		Jungen	97		
		Gesamt	227	105,5	4
	Ende 3. Klasse	Mädchen	106		
		Jungen	95		
		Gesamt	201	115,2	4,1

Aufgrund der Projektbedingungen wurden die Normierungsuntersuchungen sämtlich in nordrhein-westfälischen Städten durchgeführt, wobei bei der Auswahl der Schulen auf eine repräsentative Auswahl von Einzugsbereichen geachtet wurde. In der Regel wurden jeweils die gesamte Stufe und nicht einzelne Klassen getestet. Um die Repräsentativität der Stichprobe zu gewährleisten, wurden Kinder ausgeschlossen, die Klassen wiederholen sowie Kinder mit geringen Deutschkenntnissen und damit mit zu erwartenden Schwierigkeiten bei der Testinstruktion. In den meisten Teilstichproben war die Verteilung von Mädchen und Jungen etwa ausgewogen, obwohl dies wegen der Testung ganzer Klassen nicht systematisch kontrolliert werden konnte.

Aufgrund der durch die Aufgabenschwierigkeiten bedingten ungleichmäßigen Häufigkeiten der Punktwerte in allen Teilen wurde als Normskala eine Prozentrangskala gewählt. Ein Prozentrang von 10 bedeutet, dass 10% der Kinder gleich viele Rohwerte erreicht haben und 90% der Kinder der Stichprobe bessere Rohwerte erzielt haben.

3.3.1.2 Auswertung der Lernstandserfassungen

Die Lösungen werden sowohl **quantitativ** als auch **qualitativ** ausgewertet: Alle Aufgaben werden zunächst durch einfache Punktvergabe bewertet. Aus der entsprechenden

Normtabelle lässt sich der erreichte Prozentrangwert (PR) ablesen. Als auffällig werden PR $\leq$15 eingestuft, da dies anzeigt, dass nur 15% der Kinder die gleiche oder eine geringere Leistung erbracht haben. Damit hat ein Kind also deutlich größere Schwierigkeiten als die Mehrzahl der Kinder und weist einen erhöhten Förderbedarf auf. Der weiteren Beurteilung der Werte dienen die Markierungen der mittleren Werte (PR 50) und der Quartile in den Normtabellen.

Die erreichten Punkte allein geben jedoch nur Aufschluss darüber, ob ein Kind die Aufgabe lösen konnte oder nicht. Daher können diese quantitativen Werte durch qualitative Informationen zu individuellen Vorgehensweisen und zugrunde liegende Vorstellungen ergänzt werden. Dazu werden zum einen Hinweise zu Beobachtung, Auswertung und Fehleranalyse angeboten. Zum anderen stehen für Einzeltestsituationen Strategieanalysebögen zur Erfassung des Bearbeitungsverhaltens zur Verfügung (vgl. dazu u.). Rohwertsumme, Beobachtung, Feleranalyse und Strategieanalyse zusammen führen zu einer ersten, im Verlauf der Förderung zu prüfenden Hypothese über den Entwicklungsstand des Kindes und ermöglichen sowohl eine produkt- als auch eine prozessorientierte Interpretation der Testergebnisse.

Fehleranalysen können dazu dienen, Hypothesen über den Entwicklungsstand des Kindes zu bilden und Rückschlüsse auf mögliche zugrunde liegende fehlerhafte Strategien oder Denkprozesse und andere Fehlerquellen zu ziehen (vgl. Fritz 2003). Da sich Fehler häufig zu bestimmten Kategorien zusammenfassen lassen und systematisch auftreten, werden dazu entsprechende Hinweise gegeben (vgl. Abb. 3.36).

Abbildung 3.36: Beispiel Fehleranalyse (entnommen aus Fritz et al. 2007, 81)

Bei der Testkonstruktion wurde unterstellt, dass die Aufgaben bestimmte Anforderungen erfassen. Da eine Aufgabe jedoch häufig auf unterschiedlich elaborierten Strategieebenen gelöst werden kann und damit der Lösung qualitativ verschiedene Konzepte und Einsichten zugrunde liegen können, kann nie gewährleistet werden, dass die theoretisch intendierte Anforderung mit dem gewählten Format sicher erfasst wird. Daher kann für die LE als zusätzliche Informationsquelle eine **Strategieanalyse** durchgeführt werden. Im Einzeltest können so mithilfe von Strategieanalysebögen Leistungen bezüglich ihres Zustandekommens bewertet werden. So kann beispielsweise geklärt werden, ob und welche Rechenvorteile genutzt werden, ob zählende oder nicht-zählende Rechenstrategien verwendet werden, ob das Kind über alternative Zugangsmöglichkeiten

1 Kreise dazumalen –
Mengenvergleich; gleichmächtige Mengen erzeugen

		a	b	c	d
Frühe Strategie	Kind erstellt 1-zu-1-Zuordnung				
	Kind erstellt 1-zu-1-Zuordnung ohne Beachtung der vorgegebenen Teilmenge 2 (es wird die gesamte Menge nochmal aufgemalt)				
	Kind erstellt 1-zu-1-Zuordnung mit Beachtung der vorgegebenen Teilmenge 2 (pränumerisches Teile-Ganzes-Verständnis)				
Entwickelte Strategie	Kind zählt aus und malt gleichmächtige Menge auf (Kardinalität)				
	Kind zählt Vorgabemenge, ergänzt fehlende Teilmenge (numerisches Teile-Ganzes-Verständnis)				

7 Nachbaraufgaben – Kovarianz

		a	b	c	d
Frühe Strategie	Kind versteht Prinzip der Anforderung nicht und füllt „mechanisch" die Zeilen auf (mit jeweils gleicher Summe oder jeweils gleichem Summanden bzw. Minuenden oder Subtrahenden)				
Erkennen erster Strukturen	Kind versteht, dass die Ergebnisse der Vorgängeraufgabe jeweils um 1 kleiner und die der Nachfolgeraufgabe jeweils um 1 größer sein müssen, trägt diese Ergebnisse entsprechend ein und sucht dazu passende Aufgaben, ohne die Beziehung der Summanden bzw. Minuenden oder Subtrahenden zu denen der Ausgangsaufgabe zu durchschauen. D. h., dass jede Aufgabe ausgehend vom zuvor festgelegten Ergebnis separat berechnet wird.				
Entwickelte Strategie	Kind nutzt Beziehungen und notiert korrekte Antwort sofort				

Abbildung 3.37: Beispiele Strategieanalyse aus LE 1 und LE3 (entnommen aus Fritz et al. 2007, 83)

zu einer Aufgabenstellung verfügt und ob Beziehungen zwischen Aufgaben und Zahlen erkannt und genutzt werden. Damit kann vermieden werden, dass schwache Rechner, die die Aufgaben zwar richtig, jedoch auf einer frühen, wenig elaborierten Strategieebene lösen, als unauffällig eingestuft werden oder dass das Ausmaß von Lücken nicht richtig eingeschätzt werden. Um das Vorgehen des Kindes einschätzen zu können, werden Hinweise zu den jeweiligen Inhalten, möglichen und gewünschten Strategien gegeben. Damit lassen sich die Strategieanalysebögen ausfüllen (vgl. Abb. 3.37; s. dazu auch die Aufgabenbeschreibungen in 3.3.1.1).

3.3.2 Lernumgebung und Instruktion

Die Gestaltung von Unterricht und Förderung ist davon abhängig, welches Verständnis von Lernen zugrunde gelegt wird. Hier wird Lernen als aktiver, konstruierender und individueller Prozess in Abhängigkeit von Wechselwirkungen mit der Umwelt aufgefasst. Lernen erfordert dabei stets zweierlei grundsätzliche Dinge: Zum einen kann Lernen kaum ohne Motivation, Interesse und Aktivität des Lernenden stattfinden und zum anderen ist jeder Lernprozess interaktiv, da dem Lerner vom Lehrenden Orientierung und Anleitung gegeben werden müssen (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 1999, 212).

Damit erfordert Lernen also Konstruktion seitens des Lerners, Instruktion seitens des Lehrers und wird beeinflusst durch Interaktionen zwischen dem Lerner und dem Lehrer (auch zwischen Lerner und Lerner). Diese Sichtweise impliziert einen „Paradigmenwechsel vom rezeptiven zum aktiven Lernen“ (Gerster & Schultz 2000, 36) und hat prinzipielle didaktisch-methodische Konsequenzen, die sich beispielsweise in der Forderung nach Lernen in komplexen Problemsituationen, bedeutsamem Lernen in natürlichen Situationen und der Förderung explorativen Verhaltens niederschlagen. So musste beispielsweise die Annahme, lernschwache Kinder bedürften ausschließlich kleinschrittiger, gelenkter Wissensvermittlung bei stofflicher Reduktion oder Isolierung von Schwierigkeiten u.a. durch Scherers (1995) Versuch zu Umsetzungsmöglichkeiten aktiv-entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht für Lernbehinderte relativiert werden. Auch Walter et al. (2001) konnten zeigen, dass lernschwache Schüler im Gegensatz zu herkömmlichem Mathematikunterricht mit starker Lenkung bei Vermittlung und Lösung und einer Betonung von wiederholenden und übenden Lernstrategien von einem Mathematikunterricht nach aktiv-entdeckenden Prinzipien mehr profitieren: In diesem experimentellen Unterrichtsversuch zeigte die nach dem Konzept ‚mathe 2000’ unterrichtete Experimentalgruppe im Vergleich zur herkömmlich unterrichteten parallelisierten Kontrollgruppe deutliche Verbesserungen bzgl. des Operationsverständnisses sowie der Rechenfertigkeiten; hinsichtlich der Effekte auf Lernmotivation und Selbstkonzept unterschieden sich Kontroll- und Experimentalgruppe allerdings nicht.

Für lernschwache Kinder ist also kein grundsätzlich *anderer* Unterricht notwendig:

> „Auch lernschwache Kinder lernen nicht *prinzipiell* anders als normalbegabte Kinder. Es müsste daher auch möglich sein, lernschwache und normalbegabte Kinder **gemeinsam im Unterricht** zu fördern und dies auch im Mathematikunterricht.“ (Scherer 1998, 104; Hervorheb. i. Orig.).

Die Beantwortung der Frage, ob direkte, lehrerzentrierte Unterrichts- und Instruktionsformen oder ob sogenannte offene, aktiv-entdeckende, schülerorientierte Unterrichtsansätze zu bevorzugen sind, ist m.E. nicht als entweder-oder-Entscheidung möglich – auch nicht in Bezug auf ‚normale’ Schüler. Da Umweltbedingungen, kulturelle Normen und soziale Prozesse nicht unwesentlichen Einfluss auf die kognitive Entwicklung ausüben, ist es unsinnig, ein Kind alle Errungenschaften der Menschheit selbst ‚entdecken’ lassen zu wollen. Die Entwicklung gesellschaftlicher Erkenntnisprozesse geht der Erkenntnisbildung des Individuums voran bzw. bedingt diese, so dass der Vermittlung besondere Bedeutung zukommt (vgl. Bruner et al. 1971, 378). In diesem Sinne darf entdeckendes Lernen nicht mit Willkürlichkeit gleichgesetzt werden. Bauersfeld nimmt zu dem Verhältnis eigenaktiv entdeckender und direkter Ansätze Stellung und soll hier mit einem ausführlichen Zitat zu Wort kommen:

> „Das Verhältnis von Offenheit und Geschlossenheit des Unterrichtsangebotes stellt ein Grundproblem dar, insbesondere bei Lernbehinderten. Alle Betonung der eigenen Aktivität der Lernenden, ihrer Selbstkontrolle und Selbstverantwortung kann nicht hinwegtäuschen über den Bedarf an Vorbildern, an Anleitung sowie an permanenter Unterstützung und Ermutigung. Es ist das alte Kernproblem jeder Erziehung: Wie bildet man Unabhängigkeit in Abhängigkeit, Initiative innerhalb Rahmung und mit Vorgaben, Selbstkontrolle unter Fremdkontrolle? Dies fordert eine Kultur des Klassenzimmers, die vom Vorbild der Lehrerin mitgeprägt wird. […] Andererseits zeigen die empirischen Überprüfungen ‚offener' Unterrichtsansätze, die ja auf Selbstständigkeit und Mitverantwortung setzen, kaum Vorteile […]. So haben zum Beispiel Weinert und Helmke in ihrer SCHOLASTIK-Studie mit 54 Grundschulklassen über vier Jahre bei den sechs besten Klassen ‚überhaupt nur ein einziges Merkmal … [gefunden], bei dem alle erfolgreichen Klassen einen überdurchschnittlichen Wert aufweisen, nämlich die (aus Schülersicht erhobene) Klarheit der Lehreräußerungen' – und dieser Befund basiert allein auf dem Leistungszuwachs in Mathematik (Weinert/Helmke 1997, S. 251 und Weinert 2001). Offenbar haben das Lehrervorbild und die damit verbundene Prägung der Klassenzimmerkultur unverändert eine Schlüsselfunktion." (Bauersfeld 2003b, 445f.)

Anstelle einseitiger Ansätze ist daher eher „ein breites Repertoire von situationsgerecht ausgewählten Ansätzen im Lehrerverhalten" anzustreben (Dubs 1995, 897). Besonders Ziel-, Situations- sowie instruktionale und personale Bedingungen scheinen die Wirksamkeit von Instruktions- und Unterrichtsformen zu bestimmen: Wie Leutner & Kretzschmar (1988) in einem Lehr-Lern-Experiment zeigen konnten, führt eine gesteigerte Schüleraktivität überraschenderweise zu den schlechtesten Lernergebnissen. Dagegen kam der Aufmerksamkeits- und Unterrichtssteuerung durch den Lehrer die größte Bedeutung zu (vgl. ebd., 271). Obwohl die Ergebnisse dieser Untersuchung in erster Linie adressaten- und lehrstoffspezifisch interpretiert werden müssen, kann geschlossen werden, dass gesteigerte Schüleraktivität allein nicht immer der didaktisch optimale Weg sein muss. Zudem fällt die Wirksamkeit einzelner Bedingungen und Lernhilfen für lernstarke und lernschwache Schüler unterschiedlich aus: Bezüglich der Lernvoraussetzung schwächere Schüler haben anscheinend von der eigenaktiven Exploration des Inhaltes mehr profitiert, leistungsstärkere Schüler dagegen eher vom lehrergesteuerten Unterricht (vgl. ebd., 273). Dazu existieren weitere, uneinheitliche und widersprüchliche Befunde: Zum einen scheinen lehrerzentrierte, vermittelnde Instruktionsformen bei niedrigeren Intelligenzwerten und unzureichendem Vorwissen, offene Lernumgebungen dagegen bei guten Lernvoraussetzungen überlegen zu sein (vgl. Renkl 1996). Zum anderen wurde gezeigt, dass Schüler unabhängig vom Vorwissensniveau von anspruchsvollen Aufgaben profitieren (vgl. ebd., 181). Instruktionspsychologische Untersuchungen mit lernbehinderten Kindern belegen die Vorteile einer *Kombination* unterschiedlicher Instruktionsmethoden (vgl. Souvignier 2003, 404): Das notwendige Gerüst direkter Instruktion zur Vermittlung und Sicherung grundlegenden Wissens kann zur Anregung der Eigenaktivität und zur Unterstützung selbstregulierten Lernens aufgefüllt werden durch lernerzentrierte Methoden z.B. des entdeckenden Lernens und konkreter Erfahrungsmöglichkeiten, da diese die Einbettung und Anwendung des Gelernten unterstützen. Dieser Instruktionsrahmen bietet Raum für die Umsetzung direkter Instruktion, bei der die Lernerposition eher übernehmend-einsichtsvoll ist, sowie offenerer instruktionaler Modelle, bei denen strukturiertes, angeleitetes und weitgehend selbstständiges Entdecken und Problemlösen ermöglicht wird.

Das rahmende Instruktionsmodell für eine lernbereichsspezifische Förderung muss sich dabei immer nach dem individuellen Störungsprofil, den assoziierten Verhaltensschwierigkeiten und den situativen Bedingungen des Kindes richten. Die Lernumgebung muss also vielfältige Facetten beinhalten, was auch den Einsatz unterschiedlicher Medien und Sozialformen einschließt. Dabei können sowohl übernehmendes als auch aktiv-konstruierendes Lernerverhalten betont werden.

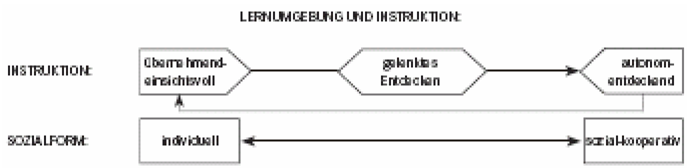


Abbildung 3.38: Kalkulie: Lernumgebung und Instruktion (entnommen aus Gerlach et al. 2007, 25)

Im Konzept Kalkulie kann die Lernumgebung daher so gestaltet werden, dass sowohl Raum für autonom-individuelles mathematisches Entdecken, Nacherfinden und Problemlöseverhalten als auch orientierend-anleitende Möglichkeiten direkter Instruktion und strukturierter Hilfen bestehen (vgl. Abb. 3.38). Insgesamt soll die Lernumgebung autonomieunterstützend wirken (vgl. 3.3.3). Die Einführung neuer Inhaltsbereiche oder individuelle Lernschwierigkeiten erfordern jedoch ebenso die Möglichkeit direkter Instruktion durch den Lehrer, der neue Informationen präsentiert, erläutert und gezielte, strukturierte Hilfen bieten kann.

Ebenso adaptiv wie die Instruktion muss auch der Einsatz unterschiedlicher Sozialformen ausgewählt werden. Aufgaben können so in Einzelarbeit individuell bearbeitet werden, mathematische Inhalte lassen sich hier aber auch innerhalb einer Sozialgruppe kooperativ behandeln. Insbesondere substanzielle Aufgabenformate wie Zahlenmauern, Rechen- und Zauberdreiecke bieten vielfältige Differenzierungsmöglichkeiten, so dass daran Kinder unterschiedlichster Lernausgangslagen gemeinsam arbeiten können (vgl. Scherer 1997). Beide Sozialformen können sowohl eher übernehmendes als auch eher aktiv-konstruierendes Lernerverhalten betonen. Von zentraler Bedeutung für einen erfolgreichen Einsatz von Kalkulie ist in jedem Fall ein intensiver Dialog zwischen Kind und Lehrer, da nur so umfassende Einsicht in die Arbeits- und Denkprozesse des Kindes gewonnen und nur so passgenaue individuelle Hilfestellungen möglich sind.

3.3.3 Strategien und Selbstregulation

Prinzipiell ist Förderung bei Lernschwierigkeiten bereichsspezifisch zu gestalten, da kognitive Fähigkeiten in abstrakter, bereichsübergreifender Form eher nicht existieren, sondern aufs engste mit domänenspezifischem Wissen verknüpft sind (vgl. Carey & Spelke 1994; Sodian 2002; Stern, 2002) und kein linearer Zusammenhang zwischen basalen Teilleistungen und Schulleistungen besteht (vgl. Fritz et al. 2003b, 300f.). Die Förderung allgemeinerer Förderaspekte wie metakognitiver Prozesse kann jedoch fachbezogene Förderung dann unterstützen, wenn sie mit fachspezifischen Inhalten selbst verknüpft, also nicht isoliert gefördert werden (vgl. von Aster 2002; Fritz et al. 2003b; Hasselhorn & Hager 2001; Ricken 2000).

So konnten Gürtler et al. (2002, 229) zeigen, dass ein „Transfer relevanter Selbstregulationskomponenten“ sowohl auf schulische als auch auf außerschulische Lernsituationen erfolgreich durch das trainingsbegleitende Führen eines standardisierten Lerntagebuches unterstützt werden kann. Dies zeigt, dass sich Selbstregulations- und Problemlösekompetenzen fördern lassen und langfristig wirksam bleiben (vgl. zu Selbstregulation und Strategien 1.5.3). Die Autoren weisen ausdrücklich auf den Vorteil *kombinierter* Trainings mit den Komponenten ‚Metakognition’, ‚Selbstregulation’ und ‚(mathematische) Problemlösestrategien’ hin und fordern eine möglichst frühzeitige Unterstützung selbstregulativer Kompetenzen (vgl. ebd., 236f.). Daher wurden diese Aspekte als wichtige Komponenten bei der Konzeption von Kalkulie einbezogen.

Voraussetzung für erfolgreiche individuelle Bedeutungskonstruktion ist neben einer tragfähigen Wissensbasis also auch die Verfügbarkeit über adäquate Strategien und selbstregulative Kompetenzen. Deren Entwicklung muss auch instruktional systematisch gefördert, unterstützt und angeleitet werden (vgl. Resnick, Williams & Hall, 1998; zit. nach Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001). Wissensvermittlung wird also um die Vermittlung von Kontroll-, Planungs-, Steuerungskompetenzen sowie um motivational-volitional unterstützende Faktoren ergänzt. Die Kombination beider Vorgehensweisen verspricht den höchsten Lerngewinn und ist Voraussetzung dafür, die Schüler zu eigenaktiv gesteuertem Vorgehen hinzuführen.

Der didaktisch-pädagogische Wert von Modellen selbstregulierten Lernens liegt u.a. darin, dass lange zur Erklärung inter-individueller Leistungsunterschiede herangezogene „stabile individuelle Merkmale (z.B. Intelligenz) oder Umweltfaktoren" durch die Grundannahme ersetzt werden, dass der Lerner eigenaktiv Maßnahmen zur (positiven) Beeinflussung seines Lernens einsetzen kann (z.B. durch Lernstrategien) (Leutner & Leopold 2003, 50). Modelle selbstregulierten Lernens bieten daher pädagogische Handlungsmöglichkeiten in Form von Vermittlung und Training von motivationalen Konzepten, kognitiven, metakognitiven und ressourcenbezogenen Lernstrategien (vgl. ebd., 50ff.).

Brunstein & Spörer (2001, 625) stellen in Anlehnung an Zimmermans Trainingsmodell (1998) vier zyklisch miteinander verbundene Komponenten der Förderung selbstregulatorischer Fertigkeiten vor:

(1) Selbstbeobachtung von Lernverhalten und -ergebnis
(2) Lernzielformulierung
(3) Erwerb und Auswahl aufgabenspezifischer Techniken und Strategien
(4) Überwachung und Bewertung des Strategieeinsatzes.

Neben Planungs- und Kontrollaspekten sind als zentrale Förderelemente zu beachten (vgl. Fritz & Funke 2002, 13):

1. Informieren über den Sinn und Nutzen von Strategien und
2. Flexibilisierung der Strategieanwendung, also Einübung von Strategien an unterschiedlichen Aufgabentypen.

Der in 1.5.3.3 herausgestellte Unterschied zwischen Prozedur- und Strategiewissen bedeutet hier, dass tragfähige Prozeduren zunächst vermittelt werden müssen, um auf der Basis einer solchen Auswahl an Alternativen strategisches Vorgehen überhaupt zu ermöglichen.

Da lernschwache Kinder häufig Defizite in Strategiewissen, -nutzung und -generalisierbarkeit, in Planungs-, Kontroll- und Steuerungsprozessen sowie im Wissen über eigene Kognitionen aufweisen (vgl. Fritz & Funke 2003, 422f.; Fritz & Hussy 2001, 98f.), werden häufig unterrichtspraktische Folgerungen in Form von hoch strukturierten Lernsituationen, lehrerzentrierter Wissensvermittlung und direkter Instruktion gezogen (vgl. Fritz & Funke 2003, 423). Der große Bedarf dieser Kinder an Unterstützung und Lenkung lässt Eigenaktivität betonende Unterrichtsformen als ungeeignet erscheinen. Fritz & Funke (2002, 423) weisen jedoch darauf hin, dass dies die Vermittlung der diskutierten bedeutsamen selbstregulativen Schlüsselkompetenzen verhindern würde. Ausschließlich direkte Instruktion kann daher nicht das Ziel sein (vgl. 3.3.2).

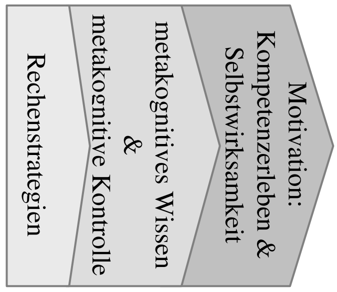


Abbildung 3.39: Kalkulie: Strategien und Selbstregulation (nach Gerlach et al. 2007, 25)

Zu Vermittlung und didaktischen Vorgehensweisen werden in Kalkulie nur Vorschläge gemacht – die Umsetzung ist immer von der Person des Lehrers, der jeweiligen Situation und natürlich vom betroffenen Kind abhängig. Diese relative Offenheit wird hier jedoch nicht strukturlos praktiziert, sondern prozessorientiert: Es sollen nicht nur richtige Ergebnisse bekräftigt werden, sondern der Prozess der Auseinandersetzung selbst soll untersucht, bewertet und reflektiert werden. Dazu werden gezielt Möglichkeiten angeboten. Zur Entwicklung individuell adäquater Einsichten sind jeweils geeignete Strategien anzubieten und zu erproben.

3.3.3.1 Rechenstrategien

Durch den Einsatz **inhaltsspezifischer Lernstrategien** soll der Lernerfolg positiv beeinflusst werden. Welche Strategien Kinder *selbst* einsetzen – in der Regel zunächst mehr oder weniger elaborierte Zählstrategien – wurde im 1.4.3, 1.5.3.3 und 1.6 dargestellt. In Unterricht und Förderung wird es darauf ankommen, Kindern tragfähige und *weiterführende* Rechenstrategien anzubieten, damit zum einen zählendes Rechnen abgebaut und zum anderen das Rechnen flexibilisiert und Strategien situationsgerecht ausgewählt und eingesetzt werden können. Ein Beispiel soll verdeutlichen, dass trotz korrekt erscheinendem Endprodukt der Lösungsweg eines Kindes auf schlichten Zählstrategien beruhen kann, da die vermittelten nicht-zählenden, weiterführenden Strategien nicht verstanden worden sind (vgl. Abb. 3.40):

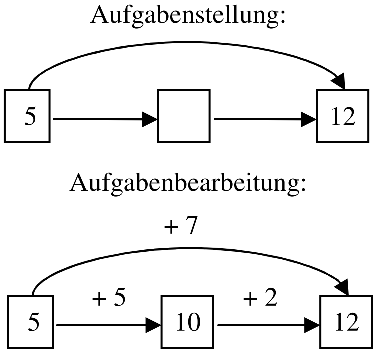


Abbildung 3.40: Rechenstrategien: Beispiel

Das Produkt im Heft des Kindes stellt sich wie in Abb. 3.40 unter „Aufgabenbearbeitung“ dar und vermittelt zunächst den Eindruck, dass das Kind über Zerlegungsstrategien verfügt und das Aufgabenformat verstanden hat. Die Nachfrage der Lehrerin hat folgendes Lösungsvorgehen des Kindes offenbart: Zunächst wurde um 5 bis 10 ergänzt („+5“). Da das Kind aber nicht wusste, dass 7 in 5 und 2 zerlegbar ist, hat es anschließend von 5 bis 12 einzeln (!) gezählt, konnte so „+7“ eintragen und hat abschließend zählend den Unterschied zwischen 10 und 12 ermittelt, um dort „+2“ eintragen zu können. Dieses Beispiel zeigt zum einen, dass Aufgabenformate, die spezifische, intendierte Strategien unterstützen sollen, wirkungslos bleiben können, wenn kein entsprechendes Grundverständnis (hier: Zerlegbarkeit von Zahlen) vorhanden ist. Zum anderen verdeutlicht es die herausragende Bedeutung des klärenden und reflektierenden Dialogs zwischen Kind und Lehrer.

Da Bedeutung individuell konstruiert werden muss und da jegliche Information und ihr Darstellungsmodus unterschiedlich, da individuell interpretiert werden, ist es nicht sinnvoll, Kinder auf ein einziges Verfahren festzulegen. Vielmehr sollen unterschiedliche Zugänge erprobt und vom Kind nach ihrer Eignung bewertet werden. Gerade schwächere Kinder profitieren von der Erfahrung unterschiedlicher möglicher strategischer Zugänge zu einer Aufgabe (vgl. Wittmann 2000):

> „Sie werden eben nicht gezwungen, einen (letztlich willkürlich!) für verbindlich erklärten Weg einzuhalten. Sollte dieser nämlich für das Kind Schwierigkeiten bereiten, so hat es keine Alternative und es bedarf dann eines erhöhten Aufwandes […], ihm die vorgeschriebene Strategie ‚beizubringen’.“ (Krauthausen 2000, 106).

Individuelle Lernwege sollten also zugelassen und wertgeschätzt werden. Diese können dann gemeinsam um effektivere Zugänge ausgebaut werden. Ebenso können und sollen wo sinnvoll alternative Verfahren modelliert werden.

Strategien werden daher auch auf unterschiedlichen Repräsentationsniveaus vorgeschlagen (vgl. 3.3.6). Dabei muss konkrete Handlung nicht zwingend der einfachere Weg sein; in Abhängigkeit von Situation, Inhalt und individuellem Verständnis können ikonische oder symbolische Repräsentationen sinnvoller sein (vgl. 1.5.2):

> „Was ‚schwer’ und was ‚leicht’ ist, läßt sich nicht generell und von außen entscheiden, sondern beruht maßgeblich auf einer ideosynkratisch konstruierten Einschätzung dessen, der mit der Aufgabe zurechtkommen soll.“ (ebd.; Hervorheb. i. Orig.)

Für strategisches Vorgehen müssen unterschiedliche Prozeduren verfügbar sein, die aufgabenadäquat, also strategisch sinnvoll ausgewählt und eingesetzt werden können (vgl. Stern 1996, 401). Dazu ist Wissen über den Strategie*nutzen* notwendig. Unterstützen lässt sich situationsangepasste Strategieauswahl durch die Förderung metakognitiver Überwachungs- und Selbstregulationsstrategien (vgl. Leopold & Leutner 2002, 255f.; 3.3.3.2).

Diese aufgeführten Teilkomponenten sind auch Bestandteil des hier vorgestellten Förderansatzes: Sinnvolle Arbeitstechniken (Rechenstrategien) und deren strategisch sinnvoller Einsatz werden gemeinsam mit dem Kind erarbeitet, alternative Möglichkeiten miteinander verglichen und situationsbezogen bewertet. Ziel ist es u.a., weiterführende Verfahren anzubieten und aufzubauen sowie eine situationsadäquate Strategieanwendung zu üben. Jede Erarbeitungsaufgabe enthält, wenn möglich, ausführliche Hinweise zu Ziel, Strategiemöglichkeiten, -auswahl und -alternativen. Dazu werden instruktionale Vorschläge gegeben, die vom Lehrer in dieser Form verwendet oder als Anregung für kind- und situationsadäquate Modifizierung genutzt werden können.

Da neu erworbene Strategien alte nicht abrupt ablösen, sondern eine Zeitlang parallel verfügbar sind, und da vertraute Strategien bevorzugter als neue, aber effektivere eingesetzt werden (vgl. Stern 1996, 401f.), sollen kontinuierlich mehrere strategische Vorgehensweisen eingesetzt, miteinander verglichen und in ihrer jeweiligen Effizienz und individuellen Brauchbarkeit bewertet werden. Durch die auf diese Weise erfolgende Handlungsreflexion und -bewertung sollen effektive Überwachsungs- und Bewertungsprozesse unterstützt werden.

Häufig werden didaktische Materialien und graphische Darstellungen zur Unterstützung bzw. Einsichtsbildung empfohlen. Um vorteilhaftes, Beziehungen ausnutzendes Rechnen zu unterstützen, sollen in Kalkulie ausgehend von geeignet strukturierten Anschauungsmitteln tragfähige und flexible Vorstellungsbilder aufgebaut sowie zählende durch nicht-zählende Strategien ersetzt werden. Besonders Felddarstellungen wie z.B. das Zwanzigerfeld können Einsicht in vielfältige Rechenverfahren bieten (vgl. Krauthausen 2000): So können daran u.a. bei der Behandlung von Aufgaben mit Zehnerüberschreitung sowohl das herkömmliche Teilschrittverfahren eingesetzt als auch die ‚Kraft der 10', die ‚Kraft der 5' oder die Kenntnis von Verdopplungsaufgaben ausgenutzt werden. Das Erarbeiten solcher Strategien an strukturiertem Material dient nicht nur dem Aufbau von entsprechenden Vorstellungsbildern, sondern ermöglicht durch konkretes Hantieren (umlegen, umordnen, neu anordnen etc.) die Entdeckung operativer Zusammenhänge und nützlicher Strukturen. Um Materialstrukturen vorteilhaft für das Rechnen nutzen zu können, sollen diese zunächst gründlich erarbeitet werden (vgl. 3.3.7).

Zahlbegriff und Rechnen sollen also strukturiert werden durch die Nutzung der Stützpunktzahlen 5 und 10. Weitere wesentliche Grundstrukturen bzw. -aufgaben sind das Addieren und Subtrahieren der 0, 1 und 2, das Verdoppeln und Halbieren, das Bilden von Zehnersummen, die Strategien ‚Kraft der 10' und ‚Kraft der 5' (vgl. Gerster & Schultz 2000, 364). Diese sind zentral, da sie als Ausgangspunkt für operative Zusammenhänge genutzt werden können. Sind diese Grundstrukturen bekannt, lassen sich von ihnen kompliziertere Aufgaben leicht ableiten. Auch nicht-zählende Rechenstrategien wie Tausch- und Nachbaraufgaben, die Strategien bzw. Strukturen des gegen- und gleichsinnigen Veränderns und des Fast-Verdoppelns (‚Verdoppeln plus 1' und ‚Verdoppeln plus 2') lassen sich ableiten (vgl. ebd.). Dies dient der beziehungsreichen Erarbeitung, Vernetzung und Automatisierung der Grundaufgaben des Kleinen 1+1 (Baustein 3).

Neben der Veranschaulichung über Material wird häufig die Anfertigung von Skizzen empfohlen, insbesondere beim Lösen von Sachaufgaben. Allerdings konzentrieren sich die Schüler dabei häufig auf unwesentliche Aspekte und Lehrern fehlt oft selbst ein präzises, der entsprechenden Aufgabe zugrunde liegendes Situationsmodell (vgl. Stern 1996, 419). In diesem Fall bleibt die von Lehrern intendierte Hilfestellung zur Anfertigung graphischer Darstellungen häufig unpräzise und ungerichtet. Die in den Kalkulie-Aufgaben ergänzenden Hinweise zu sinnvollen Prozeduren und zu strategischen Anwendungsmöglichkeiten werden, wo möglich, um Vorschläge zur graphischen Repräsentation der relevanten Strukturen erweitert. Diese Skizzen, Tabellen, Graphiken etc. können für den Lehrer ebenso bestimmt sein wie für Anregungen, das Kind selbst entsprechende ikonische Darstellungen anfertigen zu lassen.

Nachfolgend sollen die Strategie-Hinweise im Förderkonzept Kalkulie an zwei Aufgabenbeispielen illustriert werden (vgl. in Abb. 3.41 eine Aufgabe aus Baustein 1.2 und in Abb. 3.42 eine Aufgabe aus Baustein 3.2). Die Hinweise zu den Strategien sind, immer farblich abgesetzt in einem Kasten, bei jeder Aufgabe zusammengestellt.

Mengen vergleichen und angleichen: Sachaufgaben

Material Gleich große Bauklötze, Beutel oder anderes Behältnis

Inhalt Herstellen und Vergleich von Mengen durch 1-zu-1-Zuordnung

Vorgehen/Aufgabenstellung
Mündliche Aufgabenstellung mit Verwendung von Bauklötzen; zusätzlich immer Veranschaulichung der dargestellten Situation durch eine Skizze; falls möglich, symbolische Notation

a)

» So viele Bausteine hat Anna: [Bauklötze in gewünschter Anzahl vorlegen, aber *ohne* Anzahlnennung]. Wie viele Bausteine muss Jan aus der Spielzeugkiste [Beutel o. Ä.] nehmen, damit er *genauso viele* Bausteine hat wie Anna?

b)

» So viele Bausteine hat Anna: [Bauklötze in gewünschter Anzahl vorlegen, aber *ohne* Anzahlnennung]. So viele Bausteine hat Jan: [Bauklötze in gewünschter Anzahl vorlegen, aber *ohne* Anzahlnennung]. Haben beide gleich viele Bausteine oder hat einer von beiden mehr (weniger [variieren])?

c) Falls möglich, ohne Bauklötze (nur unter Vorgabe des Zahlwortes):

» Anna hat 5 (…) Bausteine. Wie viele Bausteine muss Jan aus der Spielzeugkiste nehmen, damit beide gleich viele Bausteine haben?

Verschiedene Strategien
1-zu-1-Zuordnung der Bauklötze, z.B. gleichzeitig antippen und je einen Bauklotz wegschieben
zu a) Vergleichsmenge *aus*zählen, dann gesuchte Menge herstellen durch 1-zu-1-Zuordnung oder durch *Ab*zählen
zu b) Beide Vergleichsmengen auszählen und anschließend durch 1-zu-1-Zuordnung vergleichen oder die beiden Zahlworte miteinander vergleichen
zu c) Gesuchte Menge nach Zahlwortvorgabe aus der Kiste heraus abzählen

Vergleichen der Strategien
Ist ein *Ab*zählen bereits möglich, sollte es als effektivere Strategie im Gegensatz zur 1-zu-1-Zuordnung gekennzeichnet werden.

Abbildung 3.41: Kalkulie-Aufgabenbeispiel zur Strategievermittlung I. (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 1, 88)

Sachaufgabe Murmelspiel (Teile-Ganzes-Beziehungen)

Inhalt Hier müssen Zahlbeziehungen untersucht werden. Dies ist sehr anspruchsvoll und kann Schwierigkeiten bereiten. Zur Lösung sollten alle schon erarbeiteten Rechenstrategien genutzt werden.

Vorgehen/Aufgabenstellung

» Lukas und sein Freund Markus spielen Murmeln. Markus hat 2 Murmeln mehr als Lukas. Zusammen haben sie 10 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Lukas?

Lösung
Markus hat 6 Murmeln, Alfred hat 4 Murmeln.

Variation
- Andere Zahlenpaare wählen, z. B.: 4 Murmeln mehr, beide besitzen zusammen 20 Murmeln
- Zahlengröße

Verschiedene Strategien

Mengenvergleich über aufteilen und vergleichen
Vorgegeben sind die Gesamtmenge (10) und die Differenz zwischen den zwei unbekannten Teilmengen (2). Gesucht werden die beiden Teilmengen.
Situationsverständnis:

» Wie viele Murmeln gibt es?

» Auf wie viele Personen sind die Murmeln zu verteilen? Was ist bei der Verteilung zu beachten?

(Die Gesamtmenge muss erhalten bleiben – Veränderungen an einer Teilmenge müssen daher durch entsprechende Veränderungen an der anderen Teilmenge kompensiert werden.)

Aufteilen durch unsystematisches Probieren und Verschieben
Skizzen anfertigen bzw. im Kopf probieren und verschieben

Rechenweg finden
Z. B. Markus bekommt 2 Murmeln, als Rest bleiben 8 Murmeln (10 – 2 = 8). Diese 8 Murmeln müssen nun auf die beiden Personen (Markus und Lukas) aufgeteilt werden (8 halbieren; 8 : 2 = ?). Das bedeutet, dass jeder 4 Murmeln bekommt. Markus hat zum Schluss also 2 + 4 = 6 Murmeln und Lukas 4 Murmeln.

Systematische Skizze/Notation
(s. Abb. unten)

Planung, Reflexion und Kontrolle
Vorgehen anhand einer systematischen Skizze planen und verbalisieren; die Skizze kann entweder zusammen mit dem Kind erarbeitet oder von der Lehrerin modelliert werden.
Reflexion (Einsicht entwickeln): Eine Verschiebung bewirkt eine Differenz von 2 (siehe ‚Aktion' unten in der Abbildung).

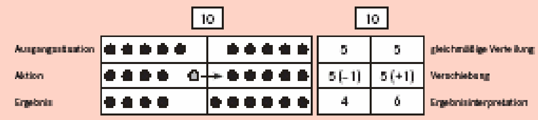


Abbildung 3.42: Kalkulie-Aufgabenbeispiel zur Strategievermittlung II. (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 3, 85)

3.3.3.2 Metakognitive, motivational-volitionale und emotionale Aspekte

Besonders jüngere Kinder scheinen Schwierigkeiten mit einer situationsangepassten Strategieauswahl sowie mit einer realistischen Einschätzung der Qualität ihrer Strategieanwendung zu haben, so dass eine Lernstrategie-Förderung immer kombiniert werden sollte mit metakognitiven Überwachungs- und Selbstregulationsstrategien:

> „Das heißt, man trainiert ausgewählte Lernstrategien so, dass die Lernenden zum einen Wissen über die Strategien erwerben und zum anderen lernen, den Einsatz der Strategien selbst so zu regulieren, dass die mit den Strategien verfolgten Ziele tatsächlich auch erreicht werden." (Leopold & Leutner 2002, 255f.).

Die Vermittlung von Metakognition erfolgt hier im Kontext bereichsspezifischer Fertigkeiten. Dazu werden Wissen über Aufgabenmerkmale, Anforderungen, Strategiemerkmale und -einsatz, eigene individuelle Bedingungen sowie Planungs-, Überwachungs- und Kontrollprozesse an den Förderaufgaben selbst behandelt. Dabei kommt der Reflexion als koordinierend-verbindendem Glied zwischen metakognitivem Wissen über Anforderungen und Ressourcen und metakognitiver Kontrolle besondere Bedeutung zu (vgl. Seel 2000, 231f.; 1.5). Wichtig zu klären ist, welche spezifischen Strategien wann und wie einzusetzen sind sowie die Betonung der Bedeutung strategischer Anstrengung für den Lernerfolg (vgl. Schneider & Hasselhorn 1988; zit. n. Hasselhorn 2001, 470).

Strategievermittlung kann auf verbaler Ebene auf zweierlei Weise erfolgen: Zum einen können durch die Methode des lauten Denkens oder durch reflexionsleitende Begleitfragen (s.u.) unbewusst angewandte Strategien des Kindes bewusst gemacht, bewertet und ausgebaut werden. Zum anderen können Strategien direkt durch Erklärung oder Modellierung vermittelt („Sieh mal: *Ich* mache das *so*…"), anschließend erst gemeinsam und später allein angewendet und abschließend in ihrem Nutzen überprüft werden. Der Bewusstmachung angewandter Strategien können verständnisunterstützende Strategien dienen: Antizipation („Was muss man bei dieser Aufgabe machen?"), lautes Denken, Situations- bzw. Lösungsanalyse („Kann das stimmen?"), Visualisieren („Mache eine Zeichnung."), Zusammenfassen („Wie hast du das gemacht? Was ist herausgekommen?"), alternative Lösungswege vergleichen und beurteilen („Wie hast du das Problem gelöst? Geht es noch anders?" – „Womit konntest du besser rechnen? Warum?"), Fehleranalyse. Darüber hinaus ist die Vermittlung arbeitssteuernder Strategien hilfreich: Arbeitsplan („Was musst du zuerst machen? Was dann? …"), Zeit („Lass dir soviel Zeit, wie du brauchst. Denk lieber noch mal nach."), Zielformulierung („Was willst du erreichen?" – „Was hast du schon geschafft? Was musst du jetzt noch machen?").

Bereits vor Beginn des Lösungsprozesses soll das Kind Vorschläge zu Strategieauswahl und -einsatz formulieren und diese dann umsetzen, es soll eigene Schwierigkeiten erkennen und dafür Erklärungen finden können (vgl. Krüll 2002, 17). Dazu stellt der Lehrer in entsprechenden Situationen Fragen folgender Art: „Wie willst du vorgehen? Warum?" „Was kannst du, was kannst du noch nicht?" „Warum stimmt deine Lösung nicht? An welcher Stelle liegt der Fehler?" „Was kannst du anders machen, damit dieser Fehler nicht mehr passiert?" Auch kann der Lehrer alternative Lösungen oder Vorgehensweisen modellieren und das Kind zu Vergleich und Bewertung auffordern: „Sieh mal: Ich habe es so gemacht. Was habe ich anders gemacht?" „Was hilft dir besser?"

Angestrebt wird hier also ein ‚metakognitiver Dialog', bei dem selbstregulierende Lernstrategien durch den „kompetenten Partner" Lehrer vermittelt werden (vgl. Fritz & Funke 2002, 14): Dabei ist darauf zu achten, dass die (evtl. offensichtlich erscheinende) Lehrerperspektive nicht zwingend notwendig die des Kindes sein muss; der Lehrer sollte sich auf unterschiedliche Sichtweisen einlassen können, dabei jedoch nicht stehen bleiben, sondern, ausgehend vom Blick des Kindes, Strategien vermitteln, die *weiter*führen.

Neben verbaler aufgabenbegleitender Reflexion bietet sich zur Förderung gedanklicher Reflexion und von Planungskompetenz das Führen eines **Lerntagebuches** durch das Kind an. Dazu sollten sowohl individuelle Lerndokumente als auch standardisiert vorgegebene Bögen (vgl. Abb. 3.43) gehören. Ziel von Lerntagebüchern ist reflektierendes Nachdenken über eigene Lernprozesse und daraus abgeleiteter adaptiver Planung. Es erfüllt hier folgende Funktionen:

- Individuelle Dokumentation des Lernweges
- Diagnose- und Planungsinstrument für Lehrer und Schüler (Leistungsbeobachtung, -planung, -reflexion, -bewertung)
- Kommunikationsmedium (Gesprächsanlässe: Anregung von Reflexionsgesprächen und gemeinsamer Planung)
- Bewertung, Rückmeldung zur und Bilanzierung der Lernentwicklung
- Reflexion über Inhalte, Vorgehen, Strategien etc. durch standardisierte Leitfragen
- Motivation durch Einsicht in Lernverlauf und durch Wertschätzung der Leistungen durch regelmäßiges Führen von und Austausch über das Lerntagebuch

Messner & Wiater (2000, 17f.) unterscheiden fünf häufige Praxis-Modelle:

(1) Schul- oder Fachtagebuch mit täglichen Aufzeichnungen als offene, unstrukturierte Dokumentation von Lerninhalten, besonderen Erlebnissen, Emotionen etc.
(2) Arbeitsheft mit Kommentarabschnitten zur Bearbeitung aller Pflichtaufgaben und deren Kommentierung durch den Schüler
(3) Tagebucheinträge zu Aufgaben aus den Phasen des Offenen Unterrichts
(4) fachbezogene Tagebücher
(5) das Reisetagebuch nach Gallin & Ruf (1998) als Heft für mehrere Fächer.

Pensenbuch und Portfolio als weitere Lerntagebuch-Varianten haben besonders bewertende Funktion und werden häufig als Alternative zur herkömmlichen Zensuren-Praxis eingesetzt (vgl. Brunner 2002; Engstler 2002; Hecker 2002; Winter 2002). Allen Lerntagebuch-Varianten gemeinsam ist ihre lernbegleitende und -unterstützende Funktion. Lerntagebücher können auch als Instrumente zur (Förder-)Diagnostik eingesetzt werden, da sie diagnostisch relevante Informationen zu individuellen Lernwegen, Stärken oder Schwierigkeiten enthalten und damit adaptive Unterrichtsplanung begünstigen.

Für Kalkulie wurde ein fachbezogenes, vorstrukturiertes, individuelle Dokumentation und standardisierte Reflexion kombinierendes Lerntagebuch konzipiert. Dem in der Regel jungen Alter der Förderkinder entsprechend wurden die Leitfragen auf je einen Reflexions- bzw. Einschätzungspunkt und einen Planungspunkt begrenzt: „Das habe ich heute gemacht." und „Das möchte ich noch machen / Das möchte ich noch üben." (vgl. Abb. 3.43). Reflexion und Planung werden so durch Fragen vorstrukturiert, um Beliebigkeit und Ziellosigkeit zu vermeiden, die Bearbeitung dieser zentralen Aspekte jedoch sicherzustellen. Die Reflexionsfrage wird ergänzt durch eine subjektive (!) Einschätzung der Schwierigkeit durch das Kind (leicht – mittel – schwer, visualisiert durch Smilies). Die Leitfragen sollen als Gesprächsanlass dienen. Daneben gibt es im Lerntagebuch Platz für freiwillige, individuelle Notizen: Dort können Einträge zu Gefühlen, Wünschen o.ä. vorgenommen werden. Ebenso haben dort Mitteilungen an den Lehrer oder persönliche Lerndokumente Platz.

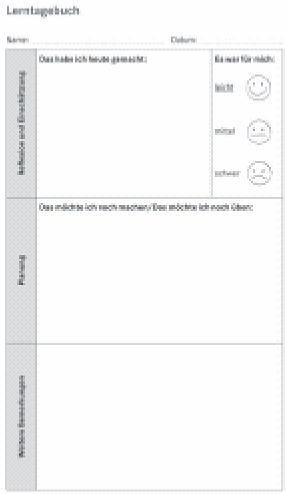


Abbildung 3.43: Kalkulie: Lerntagebuch (entnommen aus Gerlach et al. 2007)

Wichtig für eine erfolgreiche Umsetzung dieses Konzeptes ist die Regelmäßigkeit der Einträge und der gemeinsamen Besprechung. Die Leistungen des Kindes müssen gewürdigt, reflektiert und unterstützt werden. Ebenso wichtig ist die tatsächliche Berücksichtigung der Lerntagebuch-Einträge für die weitere Förderplanung. Werden diese Punkte nicht beachtet, verliert das Lerntagebuch an Glaubwürdigkeit und damit an Funktion.

Förderung deklarativer Wissensaspekte (Wissen um Personmerkmale, Strategiewissen, Aufgabenwissen), exekutiver Kontrollaspekte der Metakognition und die Stärkung argumentativer Kompetenzen der Kinder muss durch Berücksichtigung motivational-volitionaler sowie emotionaler Komponenten ergänzt werden, da Lern- und Leistungssteigerungen einer Lernmotivation und persönlicher Anstrengung bedürfen.

Der Aufbau erfolgszuversichtlicher Haltungen beim Kind bzw. die Vermeidung misserfolgsängstlicher Ausrichtungen von Leistungsmotivation soll durch eine Betonung individueller Bezugsnormen anstelle (ausschließlich) sachlicher und sozialer Bezugsnormen (vgl. Rheinberg 2001; 1.5.3.2) sowie durch die Berücksichtigung subjektiver Einschätzungen von Aufgabenschwierigkeit unterstützt werden, da nur im Rahmen subjektiv mittelschwerer Anforderungen die Lernleistung durch Metakognitionen – d.h. durch die Verfügbarkeit spezifischer und genereller Lernstrategien sowie durch deren flexiblen und reflexiven Einsatz – positiv beeinflusst werden kann (vgl. Hasselhorn 1992, 47f.). Das bedeutet, dass der individuelle Entwicklungsstand bekannt sein muss (vgl. 3.3.1), um dazu passend Anforderungen mittleren Schwierigkeitsgrades anbieten zu können. Werden Anforderungen nicht an individuelle Bedingungen angepasst, bewirken Bemühungen zur Unterstützung metakognitiver Kompetenzen nichts.

Erfahrung von Selbstwirksamkeit und Möglichkeiten zu mehr Selbstbestimmung (vgl. Deci & Ryan 1993) bauen Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit auf und stabilisieren es. Dies wird durch entsprechende didaktische Maßnahmen unterstützt: Das Kind soll über Sinn und Vorteil der zu erarbeitenden Inhalte informiert sein, es soll an Planung und Zielbildung beteiligt werden und es soll durch regelmäßige, zunächst angeleitete Reflexion das Erreichte einschätzen, bewerten und den eigenen Leistungsfortschritt erkennen können. Selbst ganz schwache und langsam lernende Kinder machen Fortschritte: Sie machen diese im Rahmen *ihrer* Möglichkeiten (individuelle Bezugsnorm). Legt man diesen individuellen Maßstab zugrunde, können Fortschritte leicht herausgestellt werden. Auf diese Weise kann das Kind die Leistungsfortschritte auf die eigene Auseinandersetzung und Anstrengung zurückführen.

Erfahrung von Selbstwirksamkeit kann u.a. durch das Führen des Lerntagebuches unterstützt werden. Durch individuelle Erfolgserlebnisse als Folge metakognitiven Verhaltens lassen sich sowohl generelles Strategiewissen (im Sinne von Sensitivität für Strategien und deren Einsatz) als auch die motivationale Einstellung verbessern (vgl. Hasselhorn 1992, 57).

Da Lernen auch durch Emotionen beeinflusst wird (vgl. Ellrott & Aps-Ellrott 2003), muss darauf geachtet werden, dass das Selbstvertrauen des Kindes nicht beschädigt bzw. dass es gestärkt wird. Daher dürfen Aufgaben und Instruktionen keine Verunsicherung hervorrufen. Um Kinder in schwierigen Situationen zu entlasten, sind entsprechende Formulierungen der Aufgabenstellungen sinnvoll: Anstatt beispielsweise bei Aufgaben zu simultaner oder quasi-simultaner Anzahlerfassung zu fragen „Wie viele sind das?“ oder „Was kommt heraus?“ wird die Anforderung offener formuliert als „Wie viele könnten es *ungefähr* sein?“. Dadurch wird jede Antwort nicht nur als richtig oder falsch kategorisierbar, sondern es entstehen Räume für Strategien der Annäherung. So wird der Arbeitsprozess bei Unsicherheit in der Anzahlermittlung nicht abgebrochen. Das Erfahren von Wertschätzung unabhängig von der Leistung unterstützt also positive Emotionen und kann damit das Lernverhalten positiv beeinflussen (vgl. ebd., 390).

Zusammenfassend werden in Kalkulie zum Aufbau selbstregulatorischer Kompetenzen u.a. folgende Prinzipien in den Angeboten berücksichtigt (vgl. dazu auch Brunstein & Spörer 2001, 626f.): Es werden sowohl kognitive als auch motivationale und metakognitive Strategien angeboten, wobei versucht wird, die Auswahl auf einige wenige, bereichsspezifisch effektive Strategien zu beschränken. Diese sollen beschrieben, begründet, deren Anwendung z.T. modelliert oder beteiligte Prozesse verbalisiert werden.

Spezifische Vorzüge und Anwendungsbereiche der einzelnen Strategie sollen im Vergleich zu anderen Strategien herausstellt werden. Neue Strategien werden ausreichend sowie transferbegünstigend in wechselnden Anforderungs- und Handlungskontexten vermittelt, eingeübt und angewandt. Entwicklungsprozesse von Strategieerwerb und -anwendung sollen begleitend rückgemeldet werden, d.h., der Lerner benötigt zur Optimierung seines Lernverhaltens regelmäßig Feedback (z.B. durch das Lerntagebuch).

3.3.4 Erarbeitung und Aufgabenarten

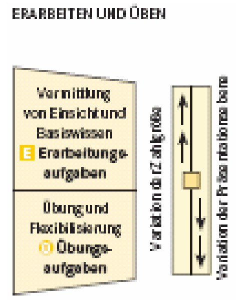


Abbildung 3.44: Kalkulie: Erarbeitung der Aufgaben (entnommen aus Gerlach et al. 2007, 25)

Die Erarbeitung der Inhalte wird eingeteilt in eine Erarbeitungsphase, die der Vermittlung zentraler mathematischer Ideen und der Einsichtsbildung dient, und in eine Phase der Übung, Vertiefung und Flexibilisierung des Erarbeiteten. Jeder Inhalt soll zunächst gründlich erarbeitet werden, bevor die Erarbeitungsaufgaben durch passende Übungsaufgaben ergänzt, gefestigt und vertieft werden. Die Übungsaufgaben können nach dem individuellen Stand zusammengestellt werden und stellen einen zusätzlichen, nur bei Bedarf vollständig zu bearbeitenden Aufgabenpool dar.

Gerade für lernschwache und lernbehinderte Kinder wird ein erhöhter Übungsbedarf angenommen, da ihr Lernen im Gegensatz zu erfolgreichen Lernern durch größeren Zeitaufwand gekennzeichnet ist, dabei aber in reduziertem Umfang und mit größerer Fehleranfälligkeit erfolgt (vgl. Scherer 1999b, 9ff.). Diese begrenzten Fähigkeiten sind jedoch „nicht allein durch ein ‚Mehr' an Übung zu kompensieren" (Scherer 1999a, 11). Wichtiger als zeitlicher Aufwand und häufige Wiederholung unverstandener Inhalte erscheint die *Art und Weise* des Übens: Anstatt mechanisch Rechenfakten und -prozeduren lernen zu müssen, sollten alle Kinder durch beziehungsreiche und herausfordernde Übungsformen in Sinnzusammenhängen Fertigkeiten sinnvoll anwenden und Beziehungen entdecken und nutzen können (vgl. Baroody 1999, 91). So hat zum Beispiel Scherer (1995) gezeigt, dass auch lernbehinderte Kinder von aktiv-entdeckenden Ansätzen profitieren. Während der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen wird im Rahmen entdeckenden Lernens das Beobachten, Erkunden, Fragen geübt und bereits Bekanntes wiederholt, da der angestrebte Suchprozess „nichts anderes bedeutet als ein Durchmustern, Umordnen und Neuordnen von Gedächtnisinhalten, was eine intensive (immanente) Wiederholung darstellt" (Winter 1994a, 31). Da lernschwache und lernbehinderte Kinder häufig begrenztere Speicherfähigkeit aufweisen und sie häufig Schwierigkeiten haben, Strukturen zu erkennen und zu nutzen, sollten besonders strukturierte, beziehungsreiche Übungsformen eingesetzt werden, da diese weniger hohe Anforderungen als unstrukturierte Übungen an das Gedächtnis stellen und gleichzeitig tiefere inhaltliche Einsichten ermöglichen: „Strukturierte Übungen ermöglichen den Kindern den Rückgriff auf vorhandenes Wissen und können damit das Rechnen erleichtern.“ (Scherer 1999a, 14f.).

Neben sachstrukturierten Übungen als Komplex gleichartiger Aufgaben, eingebettet in einen übergeordneten Sachzusammenhang und neben problemstrukturierten Aufgaben als Aufgabenkomplex zu einer übergeordneten Problemstellung eignen sich in diesem Sinne besonders operativ strukturierte Übungen (vgl. ebd.; Wittmann 1994, 180): Diese bestehen aus einem Set systematisch variierter Aufgaben, so dass die Ergebnisse in einem gesetzmäßigen Zusammenhang erscheinen (z.B. sog. operative Päckchen). Über operative Übungen lässt sich zum einen die Anforderung an Speicherkapazitäten verringern und zum anderen das Ausnutzen von Strategien und Strukturen fördern. Über die Beziehungen zwischen den Zahlen und zwischen den Rechenaufgaben kann so bewegliches Denken unterstützt werden; zudem bietet die immanente Struktur der operativ zusammengestellten Aufgabensets Formen der Selbstkontrolle (vgl. Scherer 1999a, 15). Allerdings werden die in operativen Päckchen enthaltenen Beziehungen nicht immer zwangsläufig wahrgenommen. Die Aufmerksamkeit ist deshalb gezielt darauf zu lenken bzw. ist zu gewährleisten, dass elaborierte Teile-Ganzes-Einsichten als Voraussetzung für das Erkennen vorhanden sind (vgl. 1.4.3.2).

Eine Automatisierung zuvor *einsichtig* erworbener Fertigkeiten führt zu problemlosem Abrufen und entlastet damit das Gedächtnis. Besonders die elementaren Einsichten und Fertigkeiten wie Zahlkonzept, Zählkompetenz und Rechenfertigkeiten sollen verinnerlicht werden und automatisiert verfügbar sein, um Aufmerksamkeit und Arbeitsgedächtnis zu entlasten und um so Kapazitäten für komplexere Prozesse frei zu haben. Für Einsichtbildung und verständige Automatisierung werden daher hier statt mechanischer Übungen beziehungsreiche, problemorientierte, produktive und operative Aufgaben angeboten.

Die Aufgaben zu einzelnen Inhalten bestehen in der Regel sowohl aus **Rechenaufgaben** als auch aus **Sach-** bzw. **Textaufgaben**. Hier werden also Problemsituationen nicht erst nach Vermittlung grundlegender Fertigkeiten behandelt, sondern auch an den Anfang gestellt (vgl. Gravemeijer et al. 2000). Da in Kalkulie diese Zusammenstellung der Aufgaben aus Rechen- und Sachaufgaben von bestimmten Vorstellungen zum Rechnenlernen und von bestimmten Förderzielen bestimmt ist und der Bereich des

Sachrechnens bisher nicht diskutiert worden ist, wird an dieser Stelle auf Art und Funktion der Sachaufgaben ausführlich eingegangen:

Der Bereich des **Sachrechnens**[1] gilt als besonders schwierig und unbeliebt. Vor allem lernschwache Kinder haben häufig Probleme, Sachaufgaben zu verstehen, da sich deren Lösen nicht allein auf die Anwendung von Rechenfertigkeiten beschränkt.

Anwendungsfelder des Sachrechnens sind zum einen die Anwendung von Rechenfertigkeiten und zum anderen die Umwelterschließung zur Verbindung von mathematischem und Sachwissen über die Auseinandersetzung mit „realen Problemen“ (Franke 2003, 21ff.). Sachaufgaben können auch das Problemlösen intendieren, also die Entwicklung von Lösungswegen bei komplexen, für das Kind nicht direkt lösbaren Aufgaben. Da Kalkulie keinen Schulbuch-Ersatz darstellen kann und soll, werden nicht alle lehrplanmäßig vorgesehenen Bereiche des Sachrechnens berücksichtigt.

Sinnvoller erschien es, sich auf grundlegende Strukturen und wesentliche Fertigkeiten zu konzentrieren. Dazu zählen hier zunächst das Situations- und Operationsverständnis, also die Fähigkeit, Beziehungen zu erkennen, herzustellen und zu verarbeiten zwischen Sachsituation, ikonischer oder symbolischer Darstellung eines Situationsmodells und konkret-handelnder, ikonischer oder symbolischer Verarbeitung (Rechenoperationen). Wichtig für Kinder mit Lernschwierigkeiten ist die Unterstützung bei der Entwicklung von Bearbeitungsmodellen und Lösungsstrategien; dazu gehören beispielsweise Situationsanalyse, Darstellung der Situation durch Skizzen, Tabellen, konkrete Materialien oder Symbole etc. Funktionen der Sachaufgaben sollen daher hier vorwiegend die Veranschaulichung von Zahlbedeutungen, von mathematischen Begriffen, von Operationen und von mathematischen Zusammenhängen (Funktion ‚Sachrechnen als Lernprinzip’; vgl. Winter 1994b) sowie die Erarbeitung von effektiven Methoden zur Datengewinnung, -darstellung und -verarbeitung (Funktion ‚Sachrechnen als Lernstoff’; vgl. ebd.) sein. Außerdem stellen Sachaufgaben eine effektive Möglichkeit zur Förderung der Ausbildung protoquantitativer Schemata sowie deren Integration mit der Zahlwortfolge dar (vgl. Resnick et al. 1991, 34; 1.4.1).

Für die Lösungswahrscheinlichkeit von Sachaufgaben sind dabei neben Zahlgröße und Rechenoperation die geschilderte Situation, Formulierung und mathematische Struk-

[1] Nachfolgend wird aus Gründen besserer Lesbarkeit trotz seiner Einseitigkeit nur der Terminus ‚Sachaufgabe’ bzw. ‚Sachrechnen’ verwendet. Der gültigen Auffassung nach werden unter ‚Sachen’ Gegenstände des täglichen Lebens verstanden – in den Aufgaben dargestellt als Stückzahlen (Anzahlen) oder Maßzahlen (vgl. zu Begriffsfassung und Klassifizierung der verschiedenen Aufgabentypen ausführlich Franke 2003, 31ff.). Gemeint sind hier jedoch stets alle Typen, so z.B. auch Sach- und Textaufgaben mit kombinatorischen oder stochastischen Inhalten etc.

tur (vgl. Stern 1994b, 23) entscheidend – so können sich sogar „Aufgaben mit gleicher mathematischer Struktur massiv in ihrer Schwierigkeit unterscheiden“ (Stern, 2003, 119). Es gibt vier Situationen, die zu verschiedenen Schwierigkeitsstufen führen: Kombination, Austausch, Vergleich und Angleichung von Mengen (vgl. Stern 1994b, 23). Der Abbildung 3.45 lassen sich differenzierte Prozentsätze der Lösungsraten auch für Untertypen entnehmen.

	Prozentsatz deutscher Erstkläßler, die die Aufgabe lösten
1. Kombinationsaufgaben	
1.1 Gesamtmenge unbekannt	
1.1.1 Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?	87%
1.2 Teilmenge unbekannt	
1.2.1 Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?	55%
2. Austauschaufgaben	
2.1 Endmenge unbekannt	
2.1.1 Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	89%
2.1.2 Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	95%
2.2 Austauschmenge unbekannt	
2.2.1 Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben?	52%
2.2.2 Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?	49%
2.3 Startmenge unbekannt	
2.3.1 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	49%
2.3.2 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	38%
3. Vergleichsaufgaben	
3.1 Differenzmenge unbekannt	
3.1.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?	28%
3.1.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?	32%
3.2 Vergleichsmenge unbekannt	
3.2.1 Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	53%
3.2.2 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	58%
3.3 Referenzmenge unbekannt	
3.3.1 Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	22%
3.3.2 Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	16%
4. Angleichungsaufgaben	
4.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria noch bekommen, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96%
4.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria abgeben, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96%

Abb. 1: Sechzehn Prototypen von Textaufgaben

Abbildung 3.45: Typisierung von Textaufgaben nach Stern (1994b) (dort entnommen, 24)

Kombinations-, Austausch- und Angleichungsaufgaben sind nach Stern einfacher als Vergleichsaufgaben zu lösen, da sie an das „intuitive mathematische Verständnis der Kinder“ anknüpfen – hier dienen die Rechenoperationen „allein zur Beschreibung von konkreten Mengen und deren Veränderung“ (ebd., 25). Bei Vergleichsaufgaben müssen dagegen die Rechenoperationen zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen eingesetzt werden (vgl. ebd., 24). Diese relationale Verwendung von Zahlen mache es daher schwierig, den erforderlichen Vergleich in direkte Handlung zu überführen. Diese Schwierigkeit lässt sich jedoch schon auf pränumerischem Niveau überwinden, indem eine direkte Handlungsmöglichkeit durch eine systematische 1-zu-1-Zuordnung geschaffen wird (vgl. auch Steiner 1997, 178). Diese Zugangsweise ermöglicht es, in Kalkulie die in Sterns Untersuchungen als besonders schwierig identifizierten Vergleichsaufgaben bereits auf sehr elementarem Niveau zu behandeln.

Vergleichsaufgaben werden auch durch Einbettung in einen angemessenen Kontext einfacher, da durch die Übersetzung der Situation in eine konkrete Handlung eine einfachere Struktur erzeugt werden kann: So veranlasst eine Kontextgeschichte die Kinder, die Aufgabe ‚Hans hat 3 Murmeln mehr als Peter' in ‚Peter muß noch 3 Murmeln bekommen, damit er genauso viele hat wie Hans' zu übersetzen und so die Differenzmenge als konkrete Menge zu interpretieren (vgl. Stern 1994b, 24). Da spätere gute Mathematikleistungen in der weiterführenden Schule auch eng mit guter Leistung bei der Lösung von Vergleichsaufgaben im Grundschulalter zusammenzuhängen scheinen (vgl. ebd., 25), sollte dieser Aufgabentyp stärker Berücksichtigung im Grundschulunterricht finden. Vergleichsaufgaben können das mathematische Verständnis erweitern, da sie die Einsicht in den „inversen" Zusammenhang von Addition und Subtraktion fördern und auf einem Verständnis beruhen, „wonach Zahlen nicht ausschließlich zum Zählen gebraucht werden, sondern auch zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Mengen" (ebd.).

Da es in Sachaufgaben um grundlegende Beziehungen zwischen Mengen geht, scheinen sie sich besonders dazu zu eignen, protoquantitative Schemata mit Zahlen zu verknüpfen:

> „Ihre Bearbeitung entwickelt nicht nur die mathematischen Problemlösefähigkeiten, sondern auch die Interpretation von Zahlen mittels protoquantitativen Beziehungen, insbesondere der Beziehung der Teile zum Ganzen." (Gerster & Schultz 2000, 78).

Besonders die flexible Verfügbarkeit über Teile-Ganzes-Vorstellungen ist für die Bewältigung von Sachaufgaben hilfreich, da es darüber unwichtig wird, ob nach Gesamt-, Ausgangs-, Austausch- oder Differenzmenge gefragt wird (vgl. 1.4.3.2). Die dem Teile-Ganzes-Konzept zugrunde liegende Interpretation von Mengen und Zahlen als Zusammensetzung aus Teilmengen bzw. anderen Zahlen und damit das Verständnis von Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen befähigt das Kind, die in der Sachaufgabe enthaltenen Mengen-, Zahl- und Handlungsinformationen in einen Zusammenhang zu bringen. Ein gezieltes Training von Teile-Ganzes-Konzepten kann deutliche Leistungsverbesserungen insbesondere bei Sachaufgaben und Stellenwertverständnis bewirken (vgl. ebd., 339f.).

Geeignete, kindgerechte Sachaufgaben für den Eingangsbereich der Grundschule oder sogar für den pränumerischen Bereich zu finden oder zu entwickeln ist ein hoher Anspruch. Komplexe und problemhaltige Sachaufgaben für Kinder mit fehlendem oder lückenhaftem mathematischen Grundlagenwissen zu finden, die sowohl anregend als auch lösbar sind, erscheint fast unmöglich, da diesen Kindern vermeintlich zentrale

Voraussetzungen wie ausreichende Rechenfertigkeiten und Operationsverständnis fehlen. Unter Verweis auf die Befunde der LOGIK-II-Studie betont Stern jedoch, dass „die frühe Beherrschung von Textaufgaben, die anspruchsvolle mathematische Strukturen abbilden, für die spätere Kompetenzentwicklung entscheidend ist“ (Stern 2003, 128). Für Kalkulie wurden deshalb für die Zielgruppe zugängliche Aufbereitungen solcher Aufgaben bereitgestellt.

Inhaltlich ansprechende und problemstrukturierte Sachaufgaben auch schon für Schulanfänger findet man bei Rasch (2003). Einige dieser Aufgabenstrukturen wurden daher für die Entwicklung von Kalkulie-Sachaufgaben verwendet. Dabei wurde darauf geachtet, die unterschiedlichen Strukturen nach Stern (1994b) einzubeziehen und die Aufgaben unter Betonung von Teile-Ganzes-Aspekten bearbeiten lassen zu können. Solche Sachaufgaben sind im Förderprogramm an bestimmten Stellen ausgewählt integriert und beziehen sich dabei auf Bereiche, die wesentliche Voraussetzungen und zentrale Grundideen des mathematischen Anfangsunterrichts verkörpern. Sachaufgaben können dabei in Kalkulie sowohl den Ausgangspunkt für die Erarbeitung neuer Inhalte als auch einen Anwendungs- und Übungsbereich für bereits erworbene Inhalte darstellen. Besonders wichtig war es, Aufgaben zu konstruieren, die auch von pränumerischem Verständnis ausgehend bearbeitbar sind, so dass Sachaufgaben von Anfang an in die Förderung einbezogen werden können. Dabei muss es sich

> „zunächst um das Erkennen von qualitativ-arithmetischen Zusammenhängen handeln, die mit den semantischen Strukturen des Textes kompatibel oder sogar kongruent sind. Dabei spielen ganz elementare Handlungen eine Rolle, die beispielsweise dem Nehmen, dem Verlieren, dem Ausleihen […] zugrunde liegen. […] Erst wenn die Effekte bzw. die Strukturgleichheit solcher Aktivitäten qualitativ erkannt werden, machen quantitative Denkschritte im Sinne arithmetischer Operationen Sinn.“ (Steiner 1997, 173).

Für die Aufgabenauswahl hier bedeutet das, dass auf pränumerischer Ebene in Sachaufgaben vertraute, elementare Handlungen wie Wegnehmen, Schenken, Dazutun, Ausleihen etc. thematisiert und mathematisiert werden. Die Bearbeitungsmöglichkeiten lassen sich dem Vermögen des einzelnen Kindes anpassen, indem konkrete Handlung, Anfertigung konkret darstellender oder ikonischer Skizzen, Tabellen etc., Sprache und Rechenoperationen als Zugang möglich sind.

Um die Aufgabenstruktur transparent zu machen, sind die Strategievorschläge zu den Sachaufgaben besonders ausführlich. Hier werden Situation, Handlungsverlauf und -bedeutung, Problem und Bedeutungen der Personen oder Objekte besprochen, Strategien vermittelt, entwickelt, erprobt und bewertet, und die mathematische Lösung wird auf die Sachsituation zurück bezogen. Unabhängig von aufgabenspezifischen Strategiehinweisen sind folgende Strategien zu den Problemstrukturen der verschiedenen Sachaufgabentypen wichtig (zu Kombination, Austausch und Vergleich vgl. Steiner 1997, 178):

- Kombinationsaufgaben: Vereinigen der Mengen und anschließend Auszählen aller Elemente der Vereinigungsmenge. (Eine prozedurale Erweiterung dieses Könnens stellt das Weiterzählen von einer der beiden Ausgangsmengen dar.)
- Austauschaufgaben: Zählendes Wegnehmen oder Hinzufügen und anschließend Abzählen der übrig gebliebenen Elemente.
- Angleichungsaufgaben: Weiterzählen vorwärts oder rückwärts. Auf der Ebene von Baustein 1 auch 1-zu-1-Zuordnung und anschließendes Abzählen der übrig gebliebenen Elemente
- Vergleichsaufgaben: Weiterzählen. (Zuordnen und anschließend Zählen der nach der Zuordnung übrig gebliebenen Elemente sollte hier nicht mehr als Strategie betont werden; vgl. Baustein 1).

Abschließend wird ein Beispiel zu Vergleichsaufgaben in Kalkulie gegeben (vgl. Abb. 3.46).

Anwenden der Strukturen im Sachkontext ‚Bootsausflug'

Material Freie Auswahl aus den schon behandelten Arbeitsmaterialien

Inhalt Die erarbeiteten Feld- und Reihenstrukturen des Zwanzigerraume werden im Sachkontext ‚Ausflug' angewendet. Die Aufgabenstellung is zunächst offen gehalten, es werden nur Informationen zur Situation gege ben.

Bei der Bearbeitung muss das Kind
- ein *Ziel formulieren*,
- das *Vorgehen planen* und
- unterschiedliche *Vorgehensweisen und Strategien erproben*.

Anschließend werden konkrete Fragen in Form von Sachaufgaben des Typ ‚Vergleichsaufgaben' gestellt. Da die entsprechenden Differenz-, Ver gleichs- bzw. Referenzmengen hier bekannt und am Material ersichtlicl sind, kommt es bei diesen Aufgaben nur darauf an, die Aufgabenstellun zu verstehen und mit dem Aufgabentyp vertraut zu werden.

Vorgehen/Aufgabenstellung

» „Mehrere Freunde möchten zusammen eine schöne Bootsfahrt unternehmen. 12 Freunde kommen mit zu diesem Ausflug. Auf jedem Boot können höchstens 10 Passagiere fahren. Damit sich die Fahrt für den Bootsbesitzer auch lohnt, lässt er ein Schiff nur dann fahren, wenn darauf mindestens 4 Passagiere sitzen. Was meinst du, wie sich die 12 Freunde einigen?"

Erweiterung nach erfolgter Bearbeitung
z. B. zur Lösung ‚1. Boot 4 Passagiere und 2. Boot 8 Passagiere':
Bei zügiger richtiger Bearbeitung durch das Kind sind die Verteilungen fü die folgenden Aufgaben zu variieren, damit es schwieriger und nicht z langweilig wird, ebenso bei der Aufteilungsvariante ‚6 und 6 Passagiere'. Wenn nötig, kann bei schwächeren Kindern auf das jeweilige Boot gezeig werden.

In folgender Weise werden die Aufgaben schwerer (vgl. Stern 1994, 81):

Vergleichsmenge unbekannt

» „Auf Boot 1 sitzen 4 Passagiere. Auf Boot 2 sitzen 4 Passagiere mehr als auf Boot 1. Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 2?"

» „Auf Boot 2 sitzen 8 Passagiere. Auf Boot 1 sitzen 4 Passagiere weniger als auf Boot 2. Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 1?"

Differenzmenge unbekannt

» „Auf Boot 1 sitzen 4 Passagiere. Auf Boot 2 sitzen 8 Passagiere. Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 2 mehr als auf Boot 1?"

» „Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 1 weniger als auf Boot 2?"

Referenzmenge unbekannt

» „Auf Boot 2 sitzen 8 Passagiere. Dort sitzen 4 Passagiere mehr als auf Boot 1. Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 1?"

» „Auf Boot 1 sitzen 4 Passagiere. Dort sitzen 4 Passagiere weniger als auf Boot 2. Wie viele Passagiere sitzen auf Boot 2?"

Wenn nötig, kann bei schwächeren Kindern auf das jeweilige Boot gezeigt werden.

Ziele
Verteilen und umverteilen von Mengen

Verschiedene Strategien
- Abzählen/Rechnen anhand des Materials, einer Skizze oder im Kopf
- Skizze anfertigen
- Vergleichen der verschiedenen Materialdarstellungen ‚Skizze' und ‚im Kopf'

Reflexion & Strategiebewertung:

» „Wie bin ich vorgegangen?"

» „Welcher war der beste Weg?"

Abbildung 3.46: Kalkulie-Aufgabenbeispiel zu Vergleichsaufgaben (entnommen aus Gerlach et al. 2007, Baustein 2, 59f.)

3.3.5 Zahlenraum

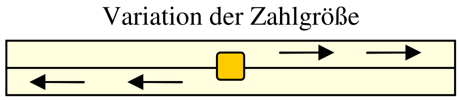


Abbildung 3.47: Kalkulie: Variation der Zahlgröße (nach Gerlach et al. 2007, 25)

Die Aufgaben beziehen sich meist auf den Zwanzigerraum. Dies hat exemplarische Bedeutung und kann bei Bedarf auf kleinere Zahlenräume beschränkt oder auf größere erweitert werden. Unter motivationalen Gesichtspunkten ist beispielsweise bei Kindern, die bereits in höheren Klassenstufen sind, denen jedoch trotzdem Grundlagen fehlen, abzuwägen, ob der Zahlenraum künstlich zu beschränken oder ob die notwendigen Grundlagen wo möglich auf der Basis eines erweiterten Zahlenraumes erarbeitet werden können.

3.3.6 Organisation, Vernetzung und Bedeutungskonstruktion auf verschiedenen Darstellungsebenen

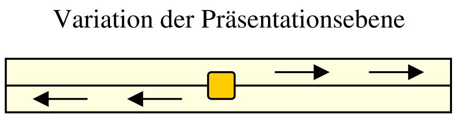


Abbildung 3.48: Kalkulie: Variation der Präsentationsebene (nach Gerlach et al. 2007, 25)

Mathematische Inhalte können auf unterschiedliche Weise repräsentiert werden: Auf enaktiver Ebene durch konkrete Handlungen, auf ikonischer Ebene durch Vorstellungen und / oder Bilder und auf symbolischer Ebene durch Sprache oder mathematische Zeichen. Schwierigkeit und Wirkweise eines jeden Mediums hängen dabei immer von inhaltlichen und instruktionalen sowie von individuellen Wissensstrukturen ab (vgl. Fritz et al. 2003b, 298). Der Umgang mit unterschiedlichen Darstellungsebenen ist entscheidend für Art und Qualität der Organisation, Vernetzung und Bedeutungsbeimessung mathematischer Konzepte.

Im Gegensatz zu häufig konzeptuell basiertem informellem Mathematikwissen behinderter Kinder ist deren schulisches, formales Wissen meistens durch unverstandenes Auswendiglernen isolierter Fakten und Prozeduren gekennzeichnet (vgl. Baroody 1999, 54). Dies kann auch auf viele nicht-behinderte Kinder zutreffen. Um sinnentleertem Auswendiglernen, der Entwicklung ineffektiver Kompensationsstrategien und uneinsichtiger Regelanwendung vorzubeugen, ist es notwendig, die *Bedeutung* einzelner *Darstellungen* und erlernter *Prozeduren* zu erschließen. Um isoliertes Wissen zu vermeiden, müssen Wissensbestände zudem sinnvoll vernetzt werden.

Solch bedeutungsvolles und vernetzendes, fortschreitendes Lernen erfordert auch Um- und Reorganisation von Wissensbeständen (vgl. 1.5.2), was durch gezielte Reflexion und Förderung von Selbstregulationskompetenzen (vgl. 1.5.3 und 3.3.3) unterstützt werden kann. Zur Vermittlung solcher Techniken bietet Kalkulie entsprechende Hinweise zur Anregung inhaltlich intensiver Aufgabenanalysen sowie von Handlungsplanung, -überwachung und bewertender Reflexion.

Häufiges Problem beim Erwerb mathematischer Kompetenz ist die unzureichende Integration neu erworbener Inhalte oder Prozeduren in bestehende Wissensstrukturen. So kann beispielsweise häufig beobachtet werden, dass Kinder trotz ausreichender Rechenfertigkeiten und -routinen diese nicht flexibel zum Problemlösen einsetzen können (vgl. Sophian 1992, 39f.). Isolierte, kontextabhängige Wissenselemente können nicht in Verbindung mit symbolischen Lerninhalten genutzt werden. Bei der Bearbeitung der Kalkulie-Aufgaben wird deshalb jeweils klargemacht, worin Sinn, Zweck, Einsatzmöglichkeit und Vorteil eines Verfahrens gegenüber anderen Verfahren bestehen.

Auch Erprobungs- und Bewertungsräume für neu erworbenes Wissen sind wichtig, wärenddessen das Kind Beobachtungen von Übereinstimmungen zwischen dem Ergebnis neu erlernter Prozeduren und dem vertrauter Prozeduren für den Prozess der Bedeutungskonstruktion nutzt. Sogar für elementare, angeborene kognitive Aspekte sind solche Erprobungsprozesse anzunehmen, bei denen das Kind unterschiedliche Zugänge ausprobiert und sich auf die jeweils effektivsten konzentriert (vgl. Sophian 1997, 347). Daher bietet Kalkulie durch Bearbeitungen *eines* mathematischen Problems durch *unterschiedliche* Zugänge ausreichende Möglichkeiten, neu vermittelte Kenntnisse in vertrauten Problemsituationen anzuwenden, neue Prozeduren etc. alten gegenüberzustellen und daran zu validieren (vgl. Sophian 1992, 40). Durch entsprechende Hinweise soll ein Vergleich alternativer Bearbeitungsstrategien nicht nur Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlaspekten etc. transparent machen, sondern auch zu einer begründeten Wahl der effektivsten und präzisesten Zugriffsweise führen. Sinn und Effizienz der Auseinandersetzung mit alternativen Zugängen sowie deren Bewertung hängen dabei wesentlich davon ab, inwiefern der Lernende das Ziel dieser Anstrengungen überhaupt kennt und inwiefern er die unterschiedlichen Zugänge zu diesem Ziel in Beziehung bringen kann (vgl. Bruner 1974, 48). Als in diesem Sinne hilfreiches Reflexions- und Planungsinstrument hat sich das Kalkulie-Lerntagebuch erwiesen.

Zueinander in Beziehung gebracht werden müssen auch die unterschiedlichen Repräsentationsmodi eines Inhaltsbereiches (vgl. 1.5.1). Deren Entwicklung hängt wesentlich von drei Rahmenbedingungen ab (vgl. Bruner et al. 1971, 379): Neben der Voraussetzung kulturell verfügbarer Darstellungsformen in Form von Bildern, Fertigkeiten oder Konzeptionen und den Bedingungen der individuellen Lebensumstände, unter denen

Erfahrungen in kognitive Strukturen umgewandelt werden können betrifft die dritte und spezifischste Gegebenheit „das Maß, in dem das Individuum angeregt wird, die Quellen der Übereinstimmung und der Diskordanz zwischen den drei Modi des Wissens […] zu explorieren" (ebd.). Dieser dritte Aspekt ist aus didaktischer Perspektive sehr bedeutsam: Das kulturelle Vorhandensein abstrakter mathematischer Systeme allein bewirkt nicht viel. Entscheidend ist das Inbeziehungsetzen und ineinander Überführen verschiedener Darstellungsebenen. So werden die Inhalte bei Kalkulie nicht ausschließlich innerhalb einer Darstellungsebene erarbeitet, sondern durch intermodalen Transfer vielfältige Übersetzungsübungen und unterschiedliche Darstellungen ein und desselben Sachverhaltes einbezogen, damit erworbenes Wissen nicht kontext- und darstellungsgebunden bleibt.

Wie in 1.5.2 dargelegt, lässt sich die Annahme, Lernprozesse begännen auf konkret handelnder Ebene und erweiterten sich dann über bildliche zu symbolischer Repräsentation, nicht mehr halten, da ein modularisiertes Gehirn den Menschen bereichsspezifisch auf seine Umwelt vorbereitet und begriffliches Wissen bereits angeboren (oder sehr früh erworben) ist. Diese „Grundausstattung" (Weinert 2000, 358) wird nicht durch handelnde Auseinandersetzung mit der Umwelt gewonnen. In der Praxis führten die Annahme einer vom Konkreten zum Abstrakten gerichteten kognitiven Entwicklung zu dem didaktisch üblichen Vorgehen der Einführung eines Inhaltes durch Handlung, dann zeichnerischer und schließlich symbolischer Darstellung. Obwohl zweifellos viele mathematische Operationen „ihren genetischen Ursprung in konkreten materiellen Handlungen" haben, kann die Annahme eines glatten und bruchlosen Übergangs von dieser konkreten Handlung zur passenden mathematischen Operation durch sogenannte Abstraktion oder Schematisierung nicht generelle Gültigkeit beanspruchen, da empirische Befunde für eine relativ unverbundene Repräsentation von Handlung und mathematischer Operation sowohl bei Kindern als auch bei Erwachsenen sprechen (vgl. Dörfler 1986, 88). Dörfler illustriert diese kognitive Trennung von konkreter Handlung und mathematischer Operation an einem Beispiel zur Einführung der Multiplikation von Aebli (1983):

> „Ein Kind holt Flaschen aus dem Keller, wobei es jedes Mal 4 Flaschen trägt und insgesamt 5 mal geht. Im Ablauf der Handlung ‚Flaschen-aus-dem-Keller-holen' selbst kann man keinen Hinweis auf die Multiplikation 5x4 finden, weil diese Handlung ja mit konkreten Dingen wie Flaschen zu tun hat und in einem Kontext abläuft, in dem vieles wichtig ist (daß man nichts zerschlägt, die Türen aufbringt usf.). Die mathematische Operation dagegen operiert mit Zahlen und ist damit eine rein mentale Aktivität." (ebd., 89; Hevorheb. i. Orig.).

Der konstruktive Akt der Verbindung dieser zwei qualitativ unterschiedlichen Ebenen besteht nach Dörfler (ebd., 89f.) aus mehreren Schritten: Zunächst muss die Aufmerksamkeit auf die Anzahlen gerichtet werden, um in der Handlung „ein mathematisches Charakteristikum […] bzw. eine gewisse Ausprägung davon“ zu identifizieren und dieses mit den ausgeführten Handlungen zu assoziieren. Anschließend muss die Aufmerksamkeit auf die sich im Handlungsverlauf ergebenden veränderten Werte gelenkt werden, um schließlich in einem dritten Schritt wieder durch entsprechende Aufmerksamkeitsfokussierung durch mentale Konstruktion „eine Beziehung zwischen den Werten des mathematischen Charakteristikums zu Beginn bzw. im Verlauf der Handlung und zum Ende der Handlung“ herzustellen. Dörfler hebt dabei hervor:

> „Diese Zuordnung kann durch keinerlei Abstraktionsprozeß im Sinne des Absehens vom Unwesentlichen aus den Handlungen entstehen und ist auch nicht der ‚innere’ Anteil der sonst äußeren ‚konkreten’ Handlung; sie liegt auf einer wesentlich anderen Ebene […] und bedarf der Integration mit der Handlung.“ (ebd., 90; Hervorheb. i. Org.).

Die verschiedenen Ebenen der Handlung, der Zuordnungen und der mathematischen Operation „als ihrer operativen Realisierung“ fallen im elaborierten Denken zusammen und vermitteln auf diese Weise den Trugschluss einer Einheit, obwohl sie tatsächlich das Produkt vielfältiger, langfristiger „konstruktiver kognitiver Prozesse“ sind (ebd.). Wissen ist demnach nicht in den Objekten an sich enthalten und lässt sich nicht durch schlichtes Hantieren erkennen. Der mathematische Aspekt beim Handeln mit Material ist sogar nur eine von mehreren möglichen Sichtweisen, so dass die Aufmerksamkeit des Lerners gezielt auf den mathematischen Aspekt gelenkt werden muss, „damit die numerischen Veränderungen, die bei der Handlung ablaufen, in den Fokus der Analyse rücken“ (Lorenz 1995, 10). Erst handlungsbegleitende Reflexionsprozesse bewirken also den Erwerb bedeutungshaltigen mathematischen Wissens. Auch Rasch (2003, 29ff.) relativiert die Bedeutung von handelndem Operieren: Bei der Bearbeitung der Aufgabe

> *Streblinde, Murks und Quicki sammeln Kastanien. Sie zählen 117 Stück. Sie wollen die Kastanien gerecht unter sich verteilen.*

in einem zweiten Schuljahr mit Bereitstellung von Arbeitsmaterial fiel auf, dass kein Kind trotz ausdrücklicher Hinweise die Aufgabe mit Material löste. Rasch kommt hier zu dem Schluss, „dass auch dem handelnden Operieren entsprechende gedankliche Vorstellungen von der Art der Operation, die hilfreich sein könnte, zugrunde liegen müssen, bevor man das Operieren mit Mengen nutzen kann.“ (ebd., 31).

So können handlungsorientierte Zugänge zum Teil sogar das Gegenteil der intendierten Einsichtsbildung bewirken und falsche oder nicht weiterführende Vorstellungen aufbauen helfen: Will man beispielsweise die Subtraktion derart verdeutlichen, dass man die Aufgabe 8–3=5 spielen lässt (acht Kinder stellen sich auf, drei gehen weg: „Wie viele bleiben übrig?“), so ergibt sich folgendes Problem: Die Aufgabenstruktur wird nicht erkannt, da die Handlung rein sequenziell bleiben muss. Von der ganzen Ausgangsmenge wird ein Teil (3 Kinder) weggenommen und der Rest kann durch Auszählen ermittelt werden. Dabei wird aber nicht deutlich, dass „8 Kinder“ das Ganze ist und dass daher 3 und 5 als Teilmengen dieses Ganzen anzusehen sind. Die Handlung des Weggehens führt nicht automatisch zum einsichtigen Verständnis der Operation, sondern wird vielmehr zu einem neuen und andersartigen Problem, welches nicht zu dem Wissen führt, dass die übrig gebliebenen 5 Kinder die Differenz aus den Mengen 8 und 3 darstellen.

Die Einführung neuer Inhalte und Verfahren über den ‚*didaktischen Dreischritt* Handlung, Darstellung, mathematische Symbole’ (vgl. Schütte 1994, 55f.) erweist sich dann als problematisch, wenn das Kind die Handlung in ihrer Bedeutung und in ihrem Zusammenhang mit ihrer mathematischen, formalen Struktur nicht erkennen kann. Der gemeinsame strukturelle Kern in Handlung und Rechenoperation kann nur durch Bedeutung gebende geistige Bearbeitung herausgearbeitet werden. Diese Bedeutungskonstruktion ist dabei individuelle Konstruktion auf der Basis des persönlichen Vorwissens.

Didaktische Schlussfolgerung bei der Aufgabenkonstruktion für Kalkulie war daher die Herbeiführung der Integration der unterschiedlichen Ebenen durch Aufmerksamkeitsfokussierung auf die relevanten mathematischen Anteile und deren Veränderung und durch reflektierende und beurteilende aktive Auseinandersetzung mit dem Inhalt. Die erforderliche handlungsbegleitende Erfahrungsauswertung, -bewertung und Reflexion werden im Förderkonzept zum einen durch entsprechende Hinweise unter dem Punkt ‚Strategien’ zu der einzelnen Aufgabe angebahnt und zum anderen durch das Führen des Lerntagebuches kontinuierlich realisiert.

Unabhängig davon, welche Repräsentationsebene als Einstieg gewählt wird, muss gewährleistet sein, dass die Bedeutung des Darstellungsmodus dem Kind einsichtig ist und dass es eventuell zu verwendende Veranschaulichungen versteht und adäquat einsetzen kann. Bezüglich des einzusetzenden Veranschaulichungsmaterials ist zu betonen, dass selbst isomorphe Veranschaulichungen gezielter Übersetzungsübungen bedürfen, da strukturelle Ähnlichkeiten nicht automatisch von Kindern identifiziert werden. Um strukturelle Gemeinsamkeiten erkennen zu können, werden vielfältige Übersetzungsübungen an strukturähnlichen Materialien und Aufgaben eingesetzt.

3.3.7 Material & Veranschaulichung

Um Vorstellungen über Zahlen, Zahlenraumstrukturen, Zahlbeziehungen, Rechenoperationen zugrunde liegende Strukturen und zu abstrakten mathematischen Begriffen zu entwickeln, werden mathematische Inhalte im Grundschulunterricht über Materialien und Veranschaulichungen eingeführt, erarbeitet und unterstützt. Mithilfe anschaulicher Arbeitsmittel soll die einem mathematischen Sachverhalt immanente Struktur einsichtig und erschließbar werden. Anschauungsmaterial soll insbesondere zur Vermeidung zählenden Rechnens beitragen, es soll graphische Darstellungen ermöglichen, arithmetische Operationen vorstellbar machen sowie die Entwicklung eigener Lösungsprozeduren und Strategien fördern (vgl. Lorenz 1995, 11f.).

Der Wert eines Veranschaulichungsmittels hängt u.a. von im Material enthaltenen mathematischen Strukturen und deren Zugänglichkeit im Einzelfall ab. U.a. bei Floer (1996) findet man eine Fülle möglicher Materialien systematisiert nach geeignetem Einsatz. Grundsätzlich sollte Anschauungsmaterial reichhaltige Aktivitäten ermöglichen, mathematische Grundideen repräsentieren, über längere Zeiträume einsetzbar und auf verschiedene Inhalte anwendbar sein, also Transfermöglichkeiten bieten (vgl. Wittmann & Müller 1993). Bei der Wahl von Veranschaulichungsmitteln ist immer der Gehalt an immanenten und darstellbaren mathematischen Begriffen und Strukturen zu prüfen.

Da rechenschwache Kinder häufig aufgrund unzureichender Rechenfertigkeiten beim zählenden Rechnen bleiben, kann ihnen das Aufzeigen von hilfreichen Strukturen beim notwendigen Ablöseprozess helfen. Da eben diese Kinder jedoch meistens besondere Schwierigkeiten gerade beim Erkennen und damit bei der Nutzung von Strukturen haben, müssen Veranschaulichungen angeboten werden, welche die relevanten mathematischen Ideen und Strukturen möglichst eindeutig widerspiegeln (vgl. Scherer 1997, 30).

U.a. folgende Veranschaulichungen verkörpern grundlegende, zentrale mathematische Ideen (vgl. Wittmann & Müller 1993; 2001):

- Zwanzigerreihe: Grundidee ‚Zahlenreihe'
- Zwanzigerfeld: Grundidee ‚Rechnen'
- Wendeplättchen: Grundideen ‚Rechnen' und ‚Zahlenmuster'

Zwanzigerreihe und -feld sind problemlos auf größere Zahlenräume zu übertragen; das Zwanzigerfeld lässt sich beispielsweise durch das Hunderterfeld weiterführen. Materialien mit Fünfer- und Zehnerstruktur wie Rechenrahmen (bis 20 oder bis 100) oder Rechenschiffchen sind ebenfalls sehr sinnvoll, da sie auf solche Grundideen zu beziehen sind. Auch der Zahlenstrahl sollte nicht vernachlässigt werden, da neben gegliederten Felddarstellungen über lineare Darstellungen besonders die ordinale Struktur der Zahlen veranschaulicht werden kann (vgl. Floer 1996, 72).

Bei Materialien lassen sich strukturierte und homogene Arbeitsmittel unterscheiden: **Strukturierte Veranschaulichungsmittel** sind Arbeitsmaterialien, die explizit für den Einsatz im Unterricht hergestellt werden. Sie sollen helfen, arithmetisch sinnvolle Strukturen zu erkennen, zu verinnerlichen und zu nutzen.

Auf die Frage nach geeigneten strukturierten Veranschaulichungen findet man in der Neuropsychologie diskussionswürdige Befunde. Diese zeigen, dass es spezifische zahlenverarbeitende Hirnfunktionen gibt, denen unterschiedliche Zahlverarbeitungsprozesse zugeordnet werden können (vgl. Dehaene 1992; vgl. auch 1.4.1): Davon ermöglicht der analog-semantische Modul das Verständnis von Quantitäten und Zahlbeziehungen auf der Basis mentaler linear-räumlicher Vorstellungsbilder. Dieser ist in Bezug auf die Frage nach angemessenen Veranschaulichungen von Bedeutung: Arithmetische Operationen müssen vor diesem Hintergrund als Bewegungen in einem vorgestellten, linear ausgerichteten Zahlenraum und Zahlbeziehungen als „geometrische Nähe oder Distanz“ verstanden werden, so dass Veranschaulichungsmittel insbesondere darauf zu prüfen wären, ob sie den Aufbau einer mentalen linearen Zahlenraumvorstellung unterstützen (vgl. Lorenz 2003b, 157f.). Lineare Zahlenräume können über unterschiedliche Zahlenstrahlmodelle dargestellt werden. Deren Einsatz erweist sich in der Praxis jedoch häufig (zunächst) als zu schwierig – nicht nur für rechenschwache Kinder. Problematisch beim Verständnis des Zahlenstrahls ist die Unterscheidung von kardinalem und ordinalem Aspekt (Lücken und Striche) sowie das korrekte Beherrschen der Unterscheidung von Richtungen (rechts / links, oben / unten, vor / nach) (vgl. Lorenz & Radatz 1993, 101; Floer 1996, 72). Probleme bei der Richtungsunterscheidung stellen aber nach dem zählenden Rechnen die zweitgrößte Symptom-Gruppe bei Rechenschwäche dar (vgl. Schipper 2001, 17). Daher sollte der Einsatz von Zahlenstrahldarstellungen nicht zu früh erfolgen und sorgfältig vorbereitet werden. Als Einführung werden daher im Kalkulie-Baustein 2 Zahlenstrahldarstellungen mit anderen Reihendarstellungen wie Rechenschiffchen oder Zwanzigerreihe kombiniert, welche die Mengenbedeutung mit abbilden, so dass eine wechselseitige Übersetzung jederzeit stattfinden kann (vgl. Abb. 3.49). Abgelöst wird der Zahlenstrahl anschließend durch den sogenannten Rechenstrich oder leeren Zahlenstrahl (vgl. auch Beishuizen & Klein 1997; Floer 1996; Lorenz 2003a; vgl. 3.2.2).

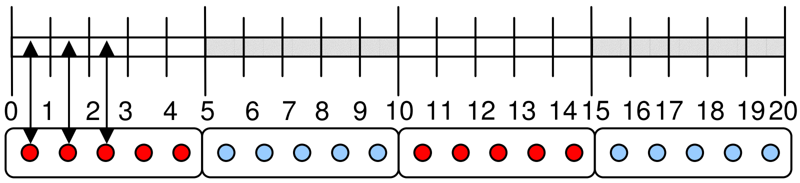


Abbildung 3.49: Kombination des Zahlenstrahls mit der Zwanzigerreihe

Ebenso wie lineare Zahldarstellungen werden in Kalkulie auch Felddarstellungen eingesetzt, um keine einseitigen Zahl- und Zahlenraumvorstellungen aufzubauen. Darüber können andere Ordnungsprinzipien wie die für strategisches Vorgehen günstigen Fünfer- oder Zehnerbündelungen entwickelt werden.

Im Gegensatz zu strukturiertem Material stellen **homogene Materialien** wie Knöpfe, Plättchen u.Ä. unverbundene Einzelelemente ohne feste Struktur dar, die hauptsächlich zählendes Vorgehen nahelegen. Um Anzahlen von mehr als drei oder vier Elementen schnell erfassen zu können, werden beispielsweise bereits Strukturierungshilfen benötigt: Durch geeignete Gliederung können diese Anzahlen ‚quasi-simultan' erfasst werden. Auch die Entwicklung adäquater Vorstellungsbilder kann nicht nur über unstrukturiertes Material aufgebaut werden, da keine organisierenden Strukturelemente vorhanden sind. Diese Unstrukturiertheit homogenen Materials ist jedoch gleichzeitig dessen Vorteil, da durch Hantieren und Sortieren damit wichtige erste Erfahrungen zum Zählen, zum Zahlbegriff, zum Ordnen und Gliedern entwickelt werden können. Homogenes Material wie z.B. Rechenplättchen haben also „amphibischen Charakter":

> „Sie sind einerseits konkret, so daß sich leicht mit ihnen hantieren läßt; andererseits aber sind sie so abstrakt, daß sie als Repräsentanten für unterschiedlichste Konkretionen stehen können." (Krauthausen 2000, 92).

Somit hat auch unstrukturiertes Material seine Berechtigung, sollte jedoch nur zu bestimmten Zwecken wie dargestellt eingesetzt werden (vgl. Baustein 2.1 in 3.2.2.1).

Damit Einsichten, Beziehungen und Strukturen verinnerlicht werden können, ist eine zu frühzeitige Ablösung von Anschauungsmaterial unbedingt zu vermeiden; Lernschwierigkeiten entstehen oder verfestigen sich im Erstrechenunterricht häufig dadurch, dass Kindern die noch benötigten Anschauungsstützen – u.U. aus Angst vor der Entwicklung von Materialabhängigkeit – zu früh entzogen werden und dies einem weitgehend sinnentleerten und begriffslosem Auswendiglernen Vorschub leistet (vgl. Scherer 1999a, 22). Ebenso wie der Einsatz ungeeigneter Arbeitsmaterialien kann ein Absetzen der Anschauungsstütze dazu führen, dass Kinder zu zählenden Rechnern werden, wenn sie noch keine effektiveren Lösungsprozeduren entwickelt hatten. Dies kann zum einen dazu führen, dass nur noch ganz einfache Aufgaben bearbeitet werden, und zum anderen ein „negatives Image“ von Lernhilfen befördern, so dass sich Schüler weigern, mit Material zu arbeiten, obwohl sie noch darauf angewiesen wären (vgl. ebd., 23).

Da die Art, die Welt zu verstehen und zu repräsentieren, auf individuellen, durch persönliches Vorwissen beeinflussten Lernprozessen beruht, da Erfahrungen bereichsspezifisch erworben werden und Wissen auf diese Weise kontextualisiert ist, können scheinbar gleiche Darstellungen eines Sachverhaltes in Abhängigkeit der Erfahrungsbereiche durchaus unterschiedlich sein. Die Wirksamkeit einer Darstellungsform hängt wesentlich davon ab,

> „inwieweit sie einen Lernenden befähigt, Dinge in Zusammenhang zu bringen, die, oberflächlich betrachtet, nichts miteinander zu tun haben. Dies gilt ganz besonders für den Bereich der Mathematik“ (Bruner 1974, 52).

Ebenso wenig wie in Dingen oder Handlungen sind mathematische Operationen selbst auch nicht in Veranschaulichungen enthalten. Auch hier wird daher in Kalkulie eine Überprüfung von Gleichem und Verschiedenem durch reflexive Auswertung, Interpretation und eine Konstruktion mentaler Repräsentation des Lernenden selbst zur Förderung der Einsichtsbildung ermöglicht.

Häufig wird besonders für lernschwache Kinder multisensorisches Lernen gefordert, da zum einen das Ansprechen vieler Sinne zu einer tieferen Verarbeitung und zu leichterem Abruf des Gelernten führen soll und da zum anderen auf der Basis von Piagets gestuftem Entwicklungsmodell oder auf der Basis der Bruner’schen Repräsentationsmodi das Lernen auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen und unter Einbezug unterschiedlicher Medien die Verinnerlichung unterstützen soll (vgl. Fritz et al. 2003b, 296). In diesem Sinne als Hilfen gedachte Aufforderungen, bei Schwierigkeiten auf formaler Ebene Material zu Hilfe zu nehmen (z.B. eine Rechenaufgabe mit Plättchen zu legen) verfehlen jedoch häufig ihren Zweck, da der erforderliche Übersetzungsprozess „bereits das Erkennen der gemeinsamen Struktur in den verschiedenen Abstraktionsebenen“ voraussetzt (Schütte 1994, 57).

Ebenso führt die Annahme positiver Effekte multisensorischen Lernens häufig zur Bereitstellung vielfältiger Materialien. Ein zu umfangreiches Materialangebot und zu häufige Variationen zeigen jedoch eher negative Auswirkungen in Form von Überforderung, sinnentleerter Anwendung u.ä., so dass bei der Materialauswahl keine Beliebigkeit herrschen darf (vgl. Scherer 1995, 100). Der Lernerfolg steigt „nicht mit der Masse der verwendeten Materialien, sondern mit der Reichhaltigkeit und Intensität der Schüleraktivitäten" (Wittmann & Müller 1993, 8), die mit den Arbeitsmitteln ermöglicht werden. Auch ist nicht jedes Material für jedes Kind in gleicher Weise geeignet.

Materialien stellen auch zunächst immer zusätzlichen Lernstoff dar, der erschlossen werden und mit dem man sich vertraut machen muss. Werden Arbeitsmaterialien nicht verstanden, können sie nicht der Veranschaulichung dienen, sondern „werden von den Kindern nach ihrem Verständnis zur Umsetzung ihrer Strategien verwendet, z.B. als Zählhilfe gedächtnisentlastend eingesetzt“ (Schulz 1998, 86). In dieser Form können Materialien nicht dem Erkennen und Nutzen von Strukturen dienen. Um Aneignungsprozesse unterstützen zu können, müssen Materialien also in ihrer Struktur und in ihrem Verwendungszweck kennen gelernt werden und vom Lernenden interpretierbar sein: „Die Kompatibilität mit den individuellen Wissensstrukturen ist ausschlaggebend dafür, ob diese als Lernhilfe verstanden werden.“ (Fritz et al. 2003b, 298).

Darüber hinaus können sich am Material entwickelte Vorstellungsbilder aufgrund individueller Konstruktionsprozesse interindividuell voneinander unterscheiden, so dass der Lehrer nicht von einem materialtypischen Vorstellungsbild ausgehen darf. Nicht zuletzt müssen also auch Aspekte wie Vorwissen und Persönlichkeit berücksichtigt und die Materialauswahl unter Gesichtspunkten individueller Nützlichkeit abgewogen werden.

Ob eher einheitliche Veranschaulichungen oder ob das flexible Verfügen über mehrere Veranschaulichungen das Rechnen besser unterstützen, wird unterschiedlich bewertet. Nach Bauersfeld kommt es in erster Linie auf den flexiblen Umgang mit Materialien an, da das Verfügen über verschiedene Darstellungen und Darstellungsmodi sowie das flexible Wechseln zwischen ihnen eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses bewirken, eine „Überbelastung dieses Arbeitsspeichers durch unverstandene oder einseitig eingeübte Darstellungen“ jedoch wesentlich zum Abbrechen mehrschrittiger Lösungsprozesse führt (Bauersfeld 2003b, 448). Solch flexibles Nutzen von Darstellungen erfordert gezielte Übersetzungs- bzw. Verbindungsprozesse. Kann ein Kind eine bestimmte Aufgabe nur an einem Material ausführen (und dies kommt sehr häufig vor!), wendet es mechanisch eine Prozedur in einem isolierten Kontext an – es hat keine tragfähige Vorstellung von dem, was es tut. Ein Transfer von einem Anschauungsmaterial auf ein anderes – scheinbar strukturgleiches oder -ähnliches – stellt hohe Anforderungen an Kinder. Gezielte und systematische Transferübungen werden daher in Kalkulie angeboten und sollen möglichst regelmäßig durchgeführt werden. Dazu kann das Kind beispielsweise aufgefordert werden, eine am Material ausgeführte Aufgabe anschließend an einem anderen Material auszuführen. Abschließend werden geeignete Verbindungen durch Diskussion und Bewertung von Unterschieden, Ähnlichkeiten, Vor- und Nachteile beider Materialien hergestellt.

3.4 Zielgruppe, Einsatz und Förderdauer

'Kalkulie' soll begleitend zum regulären Unterricht zur gezielten Intervention bei Lernschwierigkeiten in Mathematik eingesetzt werden können. Durch Lernstandserfassungen und / oder Beobachtungen oder andere Verfahren festgestellte bereichsspezifische Defizite oder Lücken sollen vermindert bzw. aufgehoben werden, indem durch entsprechende Fördermaßnahmen Fortschritte in der Entwicklung mathematikrelevanter Inhaltsbereiche angeregt werden. Im Sinne kognitiver Trainingsansätze, die darauf abzielen, „durch Interventionen Entwicklungsfortschritte auszulösen, die sich unter natürlichen Bedingungen erst im Verlauf von Jahren einstellen könnten“ (Sydow & Schmude 2001, 129) soll mithilfe des Konzeptes Kalkulie positiv auf Verlauf und Umfang von mathematischen Lernschwierigkeiten eingewirkt werden können. Rechenschwächen zeigen sich in ihrem Verlauf zwar meist sehr langwierig, die modulare Trainingsstruktur und das Angebot ausgewählter Aufgaben zu grundlegenden mathematischen Kompetenzen sollen jedoch eine individualisierte und gezielte – und damit zeitlich und inhaltlich effektivere – Förderung betroffener Leistungsbereiche erleichtern.

Das Fördermaterial soll immer dann einsetzbar sein, wenn relevante Voraussetzungen und fundamentale mathematische Aspekte fehlen oder unzureichend sind. **Zielgruppe** sind zwar hauptsächlich Kinder der Schuleingangsstufe mit geringem Vorwissen und mit Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Kompetenzen, Kinder höherer Schulstufen mit unzureichenden Basiskompetenzen sollen und können dennoch auch damit gefördert werden, wenn entsprechende Schwierigkeiten bestehen. Hierarchisch höhere mathematische Inhalte bedürfen immer ausreichenden spezifischen Grundlagenwissens. Fehlt dieses, muss es zuerst aufgebaut werden – auch wenn sich das betreffende Kind bereits in einer höheren Jahrgangsstufe befindet.

Der **Einsatz** wird bestimmt durch den jeweils gewählten **Ort der Förderung** sowie durch die individuelle **Handhabung**: Eingesetzt werden sollte Kalkulie möglichst in der Schule, da dieser die Aufgabe inhaltsspezifischer Förderung zukommt und da dort entsprechende Fachkompetenzen verfügbar sind. Ob dabei Kalkulie im Rahmen des Klassenunterrichts oder in separaten Fördergruppen eingesetzt wird, hängt von der einzelnen Situation ab. Im Klassenverband können einzelne Kinder während Freiarbeitszeiten oder im Rahmen innerer Differenzierungsmaßnahmen damit gefördert werden. Kalkulie dient also nicht der Förderung der gesamten Klasse, sondern soll die individuelle Förderung schwacher Kinder ermöglichen. Eingesetzt in Fördergruppen wäre sowohl die Bildung klassen- oder jahrgangsbezogener als auch jahrgangsübergreifender Kleingruppen denkbar. Unabhängig von der Handhabung und Gruppenzusammenstellung ist ein möglichst intensiver Dialog mit den Kindern wichtig: Die Aufgaben und Arbeitsblätter können und sollen für das Kind nicht selbsterklärend sein. Reflexion und gemeinsame Strategieerarbeitung sind zentrale Merkmale von Kalkulie, die immer des Gespräches zwischen Kind und Lehrer bedürfen. Wie dieser Anspruch konkret umzusetzen ist, kann nicht allgemeingültig beantwortet werden, sondern ist von zeitlichen, personellen und organisatorischen Aspekten abhängig.

Auch die Förder**dauer** kann nicht allgemeingültig vorgegeben werden, da diese in Abhängigkeit vom einzelnen Kind und dessen Schwierigkeitsprofil sehr unterschiedlich sein kann. Bei beeinträchtigtem *Erwerb* mathematischer Kompetenzen wird aber in keinem Fall von einer schnellen Überwindung der Schwierigkeiten auszugehen sein! Kinder mit Entwicklungsverzögerungen erarbeiten sich die Inhalte sehr langsam und werden auch nach Bewältigung der ersten festgestellten Schwierigkeiten häufig beim Erwerb darauf aufbauender Aspekte weiterer intensiver Hilfe bedürfen. Es genügt daher nicht, einen speziellen Bereich – z.B. Abzählfertigkeiten – zu trainieren und dann zu erwarten, dass die weitere Lernentwicklung wieder von allein und problemlos ablaufen wird. Daher muss mit einer längerfristigen Unterstützung und Begleitung gerechnet werden.

3.5 Zusammenfassung

Da mathematikspezifisches Wissen von Vorschulkindern deren Mathematikleistung bis zum Ende des zweiten Schuljahres in großem Umfang vorhersagt und dieses gewichtiger ist als u.a. die Intelligenz (vgl. Krajewski 2003; Weißhaupt et al. 2006; Stern 1998), kommt den frühen mathematischen Kenntnissen entscheidende Bedeutung für die den Schulerfolg in Mathematik zu. Daher sind Kinder mit beeinträchtigtem Erwerb des Rechnenlernens frühzeitig bereichsspezifisch zu fördern. Kalkulie wurde entsprechend als Diagnose- und Förderprogramm entwickelt, das an frühen Kompetenzen ansetzt und diese zu entwickeln hilft. Ziel der Förderung mit Kalkulie ist der Aufbau stabiler zentraler Grundkenntnisse und die Vermittlung arithmetisch sinnvoller, effektiver Strategien auf dieser Basis.

Bereichsspezifische Förderung wird durch verschiedene Einflussfaktoren bestimmt: Neben äußeren Rahmenbedingungen und lerntheoretischen Prinzipien auf einer allgemeineren Ebene bestimmen die Wahl didaktisch-methodischer Vorgehensweisen sowie instruktionale und materiale Bedingungen, individuelle und inhaltliche Faktoren die Fördergestaltung. Aufbau, Inhalt und Vermittlungsvorschläge von Kalkulie basieren auf den erläuterten Theorien und Studien. Da in Schulklassen aufgrund der großen Entwicklungsheterogenität nicht von ziel- und inhaltsgleichem Lernen ausgegangen werden kann, bietet Kalkulie präzise Lernstandserfassungen, individuelle Fördergestaltung sowie lernbegleitende und Maßnahmen modifizierende Förderdiagnostik. Aufgrund der Bedeutung spezifischer Vorkenntnisse und Erfahrungen für schulisches Lernen können diese erfasst und bei Defiziten über Aufgaben aus Baustein 1 aufgebaut oder kompensiert werden. In Baustein 2 geht es um den Aufbau strukturierter Zahl- und Zahlenraumvorstellungen, die zu geschicktem Rechnen genutzt werden sollen. Zentrales Ziel ist dabei der Aufbau von Zahlvorstellungen im Sinne gegliederter Quantitäten. In Baustein 3 werden schließlich nicht-zählende Rechenstrategien earbeitet, die Grundaufgaben des Kleinen 1+1 einsichtig erarbeitet und automatisiert.

Neben bereichsspezifischen Förderaspekten werden kognitionsstützende Faktoren berücksichtigt und einbezogen. Die Unterstützung selbstregulativer Kompetenzen erfordert dabei immer die Beteiligung des Lernenden an Planung und Gestaltung der Förderung sowie individuelle Zielbildung. Dazu sind kontinuierliche Reflexion, Bewertung und Planung der eigenen Lernprozesse vorgesehen. Informelle und rein zählende Zugänge werden durch weiterführende arithmetisch übliche Strukturen und Strategien angereichert und in ausbaufähige Konzepte überführt.

4. Literatur

- Aebli, H. (1963): Psychologische Didaktik. Stuttgart: Klett.
- Aebli, H. (1971): Zum Geleit. In J.S. Bruner et al., Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Klett. 7-9.
- Aebli, H. (1976): Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage. 9. Aufl. Stuttgart: Klett.
- Aebli, H. (1980): Denken: das Ordnen des Tuns. Bd. 1: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Stuttgart: Klett.
- Aebli, H. (1990): Zwölf Grundformen des Lehrens. 5. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.
- American Psychiatric Association (1994): Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders. 4th ed (DSM-IV). Washington, D.C.: APA.
- Antell, S.E. & Keating, D.P. (1983): Perception of Numerical Invariance in Neonates. In Child Development, 54, 695-701.
- Aster, M. von (1996): Die Störungen des Rechnens und der Zahlenverarbeitung in der kindlichen Entwicklung. Habilitationsschrift. Medizinische Fakultät der Universität Zürich.
- Aster, M. von (2000): Developmental cognitive neuropsychology of number processing and calculation: varieties of developmental dyscalculia. In European Child & Adolescent Psychiatry, 9, Suppl. 2, 41-57.
- Aster, M. von (2002): Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern (ZAREKI). 3. Aufl. Frankfurt a.M.: Swets Test Services.
- Aster, M. von (2003): Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (2003) (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 163-178
- Aster, M. von, Weinhold, M. & Gurtner, R. (1999): ZAREKI-K. Untersuchung von Fertigkeiten der Zahlenverarbeitung und des Rechnens im Kindergartenalter. Pilotversion. Protokoll- und Antwortbogen für die Testeichung.
- Baillargeon, R. (1993): The Object Concept Revisited: New Directions in the Investigation of Infants' Physical Knowledge. In C. Granrud (Ed.), Visual Perception and Cognition in Infancy. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum. 265-315.
- Baroody, A.J. (1986): Counting Ability of Moderately and Mildly Handicapped Children. In Education and training of the mentally retarded, 21. 289-300.

- Baroody, A.J. (1988): Number-Comparison Learning by Children Classified as Mentally Retarded. In American Journal on Mental Retardation, 92, 5. 461-471.
- Baroody, A.J. (1999): The development of basic counting, number and arithmetic knowledge among children classified as mentally handicapped. In International Review of Research in Mental Retardation. 51-103.
- Bauersfeld, H. (2003a): Rechnenlernen im System. In A. Fritz; G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Rechenschwäche. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz. 12-24.
- Bauersfeld, H. (2003b): Kommentar: Probleme und Chancen der Förderung arithmetisch-mathematischen Wissens. In A. Fritz; G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Rechenschwäche. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz. 444-449.
- Baumert, J. & Köller, O. (1996): Lernstrategien und schulische Leistungen. In J. Möller & O. Köller (Hrsg.), Emotionen, Kognitionen und Schulleistung. Weinheim: Beltz PVU. 137-154.
- Beishuizen, M. & Klein, T. (1997): Eine Aufgabe – viele Strategien. Zweitklässler lernen mit dem leeren Zahlenstrahl. In Grundschule 3/1997. 22-24.
- Bideaud, J. (1995): From Wynn’s infant „calculations“ to cardinality: What develops? In Cahiers de Psychologie Cognitive 14, 6, 685-694.
- Bortz, J. & Döring, N. (2003): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. 3. Aufl. Berlin; Heidelberg; New York: Springer.
- Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Walther, G. & Valtin, R. (2003): Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich.
- Brinkmann, E. & Brügelmann, H. (o.J.): Ideen-Kiste 1 Schrift-Sprache. Hamburg: VPM.
- Bruner, J.S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Berlin: Berlin Verlag; Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.
- Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin Verlag; Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.
- Bruner, J.S., Olver, R.R. & Greenfield, P.M. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Klett. [Originalausgabe: Bruner, J.S. (1966): Studies in Cognitive Growth. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons.]

- Brunner, I. (2002): Zielorientiertes Lernen und persönliche Bestleistung. In ide 1/2002, 56-64.
- Brunstein, J.C. & Spörer, N. (2001): Selbstgesteuertes Lernen. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Psychologie Verlags Union, Beltz. 622-629.
- Carey, S. & Spelke, E. (1994): Domain-specific knowledge and conceptual change. In L.A. Hirschfeldt & S.A. Gelman (Eds.), Mapping the mind. Cambridge University Press. 169-200.
- Carey, S. & Xu, F. (2001): Infants' knowledge of objects: beyond object files and object tracking. In Cognition, 80, 179-213.
- Carey, S. (2001): Cognitive Foundations of Arithmetic: Evolution and Ontogenisis. In Mind & Language 16, 1, 37-55.
- Clearfield, M.W. & Mix, K.S. (1999): Number Versus Contour Length In Infants' Discrimination Of Small Visual Sets. In Psychological Science, 10, 5. 408-411.
- Cooper, R.G. Jr. (1984): Early Number Development: Discovering Number Space with Addition and Subtraction. In C. Sophian (Ed.), Origins of Cognitive Skills. Hillsdale, N.J:; London: Lawrence Erlbaum. 157-192.
- Deci, E.L. & Ryan, R.M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. In Zeitschrift für Pädagogik, 39. 223-238.
- Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. In Cognition, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser.
- Dehaene, S. (2001): Précis of The Number Sense. In Mind & Language, 16, 1, 16-36.
- Dörfler, W. (1986): Zur Entwicklung mathematischer Operationen aus konkreten Handlungen. Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. 88-91.
- Dröge, R. (1992): 6 mal 7 gleich 42… oder? In: Grundschulunterricht 39, 9/1992. 13-15.
- Dubs, R. (1995): Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. In: Zeitschrift für Pädagogik, 41, 1995, 6, S. 889-903.
- Einsiedler, W., Götz, M., Hacker, H., Kahlert, J., Keck, R.W. & Sandfuchs, U. (Hrsg.): Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik. Bad Heilbrunn / Obb.: Klinkhardt.

- Ellrott, D. & Aps-Ellrott, B. (2003): Fördern – Misserfolge vermeiden und Lernerfolg sichern. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (2003) (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. S. 379-399.
- Engstler, K. (2002): Versuche mit anderen Bewertungsformen – Pensenbuch und Portfolio. In F. Winter, A. von der Groeben & K.-D. Lenzen (Hrsg.), Leistung sehen, fördern, werten. Bad Heilbrunn / Obb: Klinkhardt. 158-164.
- Erichson, Ch. (1996): Erfahrungsoffener Schriftspracherwerb und Überlegungen zur Übertragbarkeit auf das Mathematiklernen. In: Grundschulunterricht 43, 6/1996. 8-12.
- Ezawa, B (2002): Mathematische Ideen statt mechanischer Rechenfertigkeiten im Unterricht bei lernschwachen Schülern! In Zeitschrift für Heilpädagogik, 3. 98-103.
- Ezawa, B. (1992): Die Förderung mathematischer Fähigkeiten bei Geistigbehinderten mit spezifischen Lernstörungen – ein Fallbericht und therapeutische Vorschläge. In Zeitschrift für Heilpädagogik, 43. 73-83.
- Faust-Siehl, G., Garlichs, A., Ramseger, J., Schwarz, H. & Warm, U. (1996): Die Zukunft beginnt in der Grundschule. Empfehlungen zur Neugestaltung der Primarstufe. Reinbek bei Hamburg & Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V. Frankfurt a.M.: Rowohlt.
- Feigenson, L., Carey, S. & Spelke, E. (2002): Infants' Discrimination of Number vs. Continuous Extent. In Cognitive Psychology, 44, 33-66.
- Floer, J. (1996): *Mathematikwerkstatt*. Lernmaterialien zum Rechnen und Entdecken für Klassen 1 bis 4. Weinheim; Basel: Beltz.
- Franke, M. (2003): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg; Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Freeman, N.H., Antonucci, Ch. & Lewis, Ch. (2000): Representation of the cardinality principle: early conception of error in a counterfactual test. In Cognition, 74, 71-89.
- Fritz, A. & Funke, J. (2002): Planen und Problemlösen als fächerübergreifende Kompetenzen. In lernchancen 25. 6-14.
- Fritz, A. & Funke, J. (2003): Planungsfähigkeit bei lernbehinderten Kindern: Grundsätzliche Überlegungen zum Konstrukt sowie zu dessen Diagnostik und Training. In G. Ricken, A. Fritz & Ch. Hofmann (Hrsg.), Diagnose: Sonderpädagogischer Förderbedarf. Lengerich: Pabst. 416-439.

- Fritz, A. & Hussy, W. (2001): Training der Planungsfähigkeit bei Grundschulkindern – eine Evaluationsstudie. In K.J. Klauer (Hrsg.): Handbuch kognitives Training. Göttingen; Bern; Toronto; Seattle: Hogrefe. 97-127.
- Fritz, A. & Ricken, G. (1998): Wie lassen sich Probleme im Rechnen diagnostizieren? – Ein kritischer Vergleich unterschiedlicher Ansätze – In Heilpädagogische Forschung, Bd. XXIV, 3. 104-113.
- Fritz, A. & Ricken, G. (2001a): Nur mit dem Rechnen klappt es nicht so gut. In: B. Lumer (Hrsg.): *Integration behinderter Kinder*: Erfahrungen; Reflexionen; Anregungen. Lehrer-Bücherei: Grundschule. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 40-55.
- Fritz, A. & Ricken, G. (2001b): Rechnen war nie mein Ding! In Pädagogik, 1. 18-22.
- Fritz, A. & Ricken, G. (2005): Früherkennung von Kindern mit Schwierigkeiten im Erwerb von Rechenfertigkeiten. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 5-27.
- Fritz, A. & Ricken, G.: Test zur Erfassung mathematischer Kompetenzen im Vorschulalter (i. Vorb.)
- Fritz, A. (2003): Bedingungsvariation und Fehleranalysen als Beobachtungszugänge zur Diagnostik arithmetischer Kompetenz. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 283-308.
- Fritz, A., Ricken, G. & Gerlach, M. (2007): Handreichung zur Durchführung der Diagnose. Kalkulie – Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Berlin: Cornelsen.
- Fritz, A., Ricken, G. & Schlottke, P.F. (2005): Entwicklungsstörungen beim Erwerb schulischer Fertigkeiten: umschriebene Entwicklungsstörung des Rechnens. In P.F. Schlottke, R. Silbereisen & R. Lauth (Hrsg.), Störungen im Kindes- und Jugendalter. Bd. 11/5 der Enzyklopädie der Psychologie. Göttingen: Hogrefe. 691-727.
- Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (2003a) (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz.
- Fritz, A., Ricken, G. & Schuck, K.D. (2003b): Teilleistungen und Lernprozesse. In G. Ricken, A. Fritz & Ch. Hofmann (Hrsg.), Diagnose: Sonderpädagogischer Förderbedarf. 292-306.
- Frydman, O. & Bryant, P. (1988): Sharing and the Understanding of Number Equivalence by Young Children. In Cognitive Development 3, 323-339.

- Fuson, K.C. & Hall, J.W. (1983): The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review. In H.P. Ginsburg (ed.), The Development of Mathematical Thinking. Orlando; San Diego; New York; London; Toronto; Montreal; Sydney; Tokyo: Academic Press. 49-107.
- Fuson, K.C. (1988): Children’s Counting and Concepts of Number. New York: Springer.
- Fuson, K.C. (1992a): Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. 53-187.
- Fuson, K.C. (1992b): Relationships Between Counting and Cardinality From Age 2 to Age 8. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (eds.), Pathways To Number. Hillsdale; New Jersey: Lawrence Erlbaum. 127-149.
- Fuson, K.C., Richards, J. & Briars, D.J. (1982): The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. In Ch.E. Brainerd (ed.), Children’s Logical and Mathematical Cognition. New York; Heidelberg; Berlin: Springer. 33-92.
- Gallistel, C.R. & Gelman, R. (1993): Preverbal and verbal counting and computation. In S. Dehaene (ed.), Numerical cognition. Oxford / Cambridge: Blackwell 43-74.
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978): The Child’s understanding of Number.Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Gerlach, M., Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (2007): Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Berlin: Cornelsen
- Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Freiburg i.B.: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.
- Gerster, H.-D. (2003a): Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 201-221.
- Gerster, H.-D. (2003b): Schwierigkeiten beim Erwerb arithmetischer Konzepte im Anfangsunterricht. In F. Lenart, N. Holzer & H. Schaupp (Hrsg.), Rechenschwäche, Rechenstörung, Dyskalkulie. Graz: Leykam. 154-160.
- Grassmann, M. (2002): Überall sind Zahlen – arithmetische Vorerfahrungen von Schulanfängern. In Grundschulunterricht 6/2002. 3-7.

- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000): Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (eds.), Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms. London: Lawrence Erlbaum. 225-273.
- Greeno, J.G. (1991): Number Sense as situated knowing in a conceptual domain. In Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3. 170-218.
- Gruber, H. (1999): Wissen. In Ch. Perleth & A. Ziegler (Hrsg.), Pädagogische Psychologie. Bern; Göttingen; Toronto; Seattle: Huber. 94-102.
- Gruber, H. (2001): Expertise. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 164-169.
- Gürtler, T., Perels, F., Schmitz, B. & Bruder, R. (2002): Training zur Förderung selbstregulativer Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik. In Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft. 222-239.
- Haffner, J., Baro, K., Parzer, P. & Resch, F. (2005a): Heidelberger Rechentest (HRT 1-4). Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter. Göttingen: Hogrefe.
- Haffner, J., Baro, K., Parzer, P., Wu, H. & Resch, F. (2005b): Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen: Der Heidelberger Rechentest HRT. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 125-151.
- Hasselhorn, M. & Hager, W. (2001): Kognitives Training. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Auflage. Weinheim: Psychologie Verlags Union. 343-351.
- Hasselhorn, M. & Schreblowski, S. (2002): Das Lernen lernen! Verbesserung der Lernkompetenzen durch metakognitives Training und Motivänderung. In lernchancen 25/2002. 23-28.
- Hasselhorn, M. (1992): Metakognition und Lernen. In G. Nold (Hrsg.), Lernbedingungen und Lernstrategien. Tübingen: Gunter Narr. 35-63.
- Hasselhorn, M. (2001): Metakognition. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Psychologie Verlags Union, Beltz. 466-471.

- Hasselhorn, M., Marx, H. & Schneider, W. (Hrsg.) (2005): Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe.
- Hasselhorn, M., Roick, T. & Gölitz, D. (2005): Stabilitäten und prognostische Validitäten der Mathematikleistungen: Eine Längsschnittstudie mit der DEMAT-Reihe in der Grundschule. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 187-198.
- Hecker, U. (2002): Perspektive Portfolio. In Grundschulunterricht 10/2002. 45-46.
- Helmke, A. (1992): Determinanten der Schulleistung: Forschungsstand und Forschungsdefizit. In G. Nold (Hrsg.), Lernbedingungen und Lernstrategien. Tübingen: Gunter Narr. 23-34.
- Helmke, A. (1997a): Individuelle Bedingungsfaktoren der Schulleistung: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz PVU. 203-216.
- Helmke, A. (1997b): Das Stereotyp des schlechten Schülers: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz PVU. 269-279.
- Hemminger, U., Roth, E., Schneck, S., Jans, T. & Warnke, A. (2000): Testdiagnostische Verfahren zur Überprüfung der Fertigkeiten im Lesen, Rechtschreiben und Rechnen. Eine kritische Übersicht. In Zeitschrift für Kinder- und Jugendpsychiatrie und Psychotherapie, 28 (3), 188-201.
- Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1995): Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In H. Brügelmann, H. Balhorn & I. Füssenich (Hrsg.), Am Rande der Schrift. Lengwil: Libelle. 66-86.
- Hespos, S.J. & Baillargeon, R. (2001): Reasoning about containment events in very young infants. In Cognition, 78, 207-245.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1995): Leistungsmessung im aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht. In H. Brügelmann, H. Balhorn & I. Füssenich (Hrsg.), Am Rande der Schrift. Lengwil: Libelle. 87-107.
- Holodynski, M. & Oerter, R. (2002): Motivation, Emotion und Handlungsregulation. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5., vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 551-589.

- Internationale Klassifikation psychischer Störungen ICD-10 (1993). Kapitel V (F). Klinisch-diagnostische Leitlinien. Dilling, H., Mombour, W. & Schmidt, M.H. (Hrsg.). 2. Aufl. Bern: Huber.
- Kaufmann, S. (2003): Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen. Frankfurt a.M: Peter Lang.
- Klauer, K.J. (Hrsg.): Handbuch Kognitives Training. 2., überarb. u. erw. Aufl. Göttingen; Bern; Toronto; Seattle: Hogrefe.
- Kornmann, R. (2003): Kommentar: Analysen von Rechenschwierigkeiten aus unterschiedlichen Perspektiven. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (2003) (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. S. 248-257.
- Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.
- Krajewski, K. (2005): Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In Hasselhorn, M., Marx, H. & Schneider, W. (Hrsg.) (2005): Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 49-70.
- Krajewski, K., Küspert, P. & Schneider, W. (2002): Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT +1). Göttingen: Beltz Test.
- Krauthausen, G. (2000): Die „Kraft der Fünf“ und da denkende Rechnen. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. 2., unveränd. Aufl. v. 1995. Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grunddschule – Der Grundschulverband e.V. 87-108.
- Krauthausen, G. (2003): Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 80-97.
- Krüll, K.E. (2002): Rechnen leicht gemacht. Selber planen – sinnvoll kontrollieren – Selbstwirksamkeit erfahren. In lernchancen 25/2002. 15-22.
- Kutzer, R. (1983): Mathematik entdecken und verstehen. Lehrerband. Frankfurt a. M.: Diesterweg.
- Lefrancois, G.R. (1994): Psychologie des Lernens. 3., unveränderte Aufl. Berlin; Heidelberg: Springer.

- Lenart, F., Holzer, N. & Schaupp, H. (2003) (Hrsg.): Rechenschwäche, Rechenstörung, Dyskalkulie. Graz: Leykam.
- Leopold, C. & Leutner, D. (2002): Der Einsatz von Lernstrategien in einer konkreten Lernsituation bei Schülern unterschiedlicher Jahrgangsstufen. In Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, 240-258.
- Leutner, D. & Kretzschmar, R. (1988): Veranschaulichung und Aktivierung: Überraschende Effekte zweier didaktischer Prinzipien. In Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 3, 263-276.
- Leutner, D. & Leopold, C. (2003): Lehr-lernpsychologische Grundlagen selbstregulierten Lernens. In U. Witthaus, W. Wittwer & C. Espe (Hrsg.), Selbst gesteuertes Lernen – Theoretische und praktische Zugänge. Bielefeld: Bertelsmann. 43-67.
- Lorenz, J.H. & Radatz, H. (1993): *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel-Schulbuchverlag.
- Lorenz, J.H. (1992): *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen; Toronto; Zürich: Hogrefe, Verlag für Psychologie.
- Lorenz, J.H. (1995): Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. In Die Grundschulzeitschrift 82/1995. 8-12.
- Lorenz, J.H. (1998): Das arithmetische Denken von Vorschulkindern. In: A. Peter-Koop (Hrsg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger. 59-81.
- Lorenz, J.H. (2003a): Der leere Zahlenstrahl. In mathematik lehren 117/2003. 14-18.
- Lorenz, J.H. (2003b): Überblick über Theorien zur Entstehung und Entwicklung von Rechenschwächen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 144-162.
- Lorenz, J.H. (2005): Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen im Vorschulalter. In M. Hasselhorn, H. Marx, & W. Schneider (Hrsg.) (2005), Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 29-48.
- Luit, J.E.H. van, Rijt, B.A.M van de & Hasemann, K. (2001): Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ). Göttingen: Hogrefe.

- Meck, W.H. & Church, R.M. (1983): A Mode Control Model of Counting and Timing Processes. In Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 9, 3. 320-334.
- Messner, A. & Wiater, W. (2000): Das Lerntagebuch. In lernchancen 15/2000, 16-19.
- Milz, I. (1999): Rechenschwächen erkennen und behandeln. Teilleistungsstörungen im mathematischen Denken. 5. Aufl. Dortmund: Borgmann.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung (MSW) (2006): Neues Schulgesetz NRW. Sonderausgabe zum Amtsblatt des Ministeriums für Schule und Weiterbildung.
- Mix, K.S., Huttenlocher, J. & Levine, S.C. (1996): Do Preschool Children Recognize Auditory-Visual Numerical Correspondences? In Child Development, 67, 1592-1608.
- Möller, J. & Köller, O. (1996) (Hrsg.): Emotionen, Kognitionen und Schulleistung. Weinheim: Beltz PVU.
- Möller, K. (2001): Konstruktivistische Sichtweisen für das Lernen in der Grundschule? In: H.G. Rossbach, K. Nölle & K. Czerwenka (Hrsg.), Jahrbuch Grundschulforschung Bd.4, Forschungen zu Lehr- und Lernkonzepten für die Grundschule. Opladen: Leske + Budrich. 16-31.
- Montada, L. (2002a): Fragen, Konzepte, Perspektiven. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5. vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 3-53.
- Montada, L. (2002b): Die geistige Entwicklung aus der Sicht Jean Piagets. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5. vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 418-442.
- Moser Opitz, E. (2002): Zählen Zahlbegriff Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. 2., durchgesehene Aufl. Bern; Stuttgart; Wien: Haupt.
- Needham, A. & Baillargeon, R. (2000): Infants' use of featural and experiential information in segregation and individuating objects: a reply to Xu, Carey and Welch (2000), In Cognition, 74, 255-284.
- Oerter, R. & Dreher, M. (2002): Entwicklung des Problemlösens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5., vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 469-494.
- Oerter, R. & Montada, L. (Hrsg.) (2002): Entwicklungspsychologie. 5., vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU.

- Oerter, R. (1974): Psychologie des Denkens. 4. Aufl. Donauwörth: Ludwig Auer.
- Ostad, S.A. (1998): Developmental Differences in Solving Simple Arithmetic Word Problems and Simple Number-fact Problems: A Comparison of Mathematically Normal and Mathematically Disabled Children. In Mathematical Cognition, 4 (1). 1-19.
- Padberg, F. (1996): *Didaktik der Arithmetik*. Texte zur Didaktik der Mathematik. 2. Aufl. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.
- Perleth, Ch. & Ziegler, A. (Hrsg.) (1999): Pädagogische Psychologie. Bern; Göttingen; Toronto; Seattle: Huber.
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1975): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Bd. 3 innerhalb der Gesammelten Werke (Studienausgabe). Stuttgart: Klett.
- Portmann, R. (1997): Schülerinnen und Schüler beobachten und beurteilen. In: D. Haarmann (Hrsg.), Handbuch elementare Schulpädagogik. Handlungsfelder institutionalisierter Grund- und Allgemeinbildung in den Klassen 1 bis 10. Weinheim; Basel: Beltz. 225-249.
- Probst, H. & Waniek, D. (2003): Kommentar: Erste numerische Kenntnisse von Kindern und ihre didaktische Bedeutung. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (2003) (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 65-78.
- Radatz, H & Schipper, W. (1983): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
- Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Hg. v. G.N. Müller & E.Ch. Wittmann. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (1999): Instruktion. In Ch. Perleth & A. Ziegler (Hrsg.), Pädagogische Psychologie. Bern; Göttingen; Toronto; Seattle: Huber. 207-215.
- Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), Pädagogische Psychologie. 4., vollst. überarb. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 601-646.
- Reiserer, M. & Mandl, H. (2002): Individuelle Bedingungen lebensbegleitenden Lernens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5., vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 923-939.
- Renkl, A. (1996): Vorwissen und Schulleistung. In J. Möller & O. Köller (Hrsg.), Emotionen, Kognitionen und Schulleistung. Weinheim: Beltz PVU. 175-190.

- Resnick, L.B. (1983): A Developmental Theory of Number Understanding. In H.P. Ginsburg (ed.), The Development of Mathematical Thinking. Academic Press. 109-151.
- Resnick, L.B. (1989): Developing Mathematical Knowledge. In American Psychologist, 44, (2). 162-169.
- Resnick, L.B. (1992): From Protoquantities To Operators: Building Mathematical Competence On A Foundation Of Everyday Knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (eds.), Analysis Of Arithmetic For Mathematics Teaching. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. 373-429.
- Resnick, L.B. (1994): Situated rationalism: Biological and social preparation for learning. In L.A. Hirschfeld & S.A. Gelman (eds.), Mapping the mind. Cambridge University Press. 474-493.
- Resnick, L.B., Bill, V.L., Lesgold, S.B. & Leer, M.N. (1991): Thinking in Arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M.S. Knapp (eds.), Teaching Advanced Skills To At-Risk Students. San Francisco; Oxford: Jossey-Bass Publishers. 27-53.
- Rheinberg, F. (1996): Von der Lernmotivation zur Lernleistung: Was liegt dazwischen? In J. Möller & O. Köller (Hrsg.), Emotionen, Kognitionen und Schulleistung. Weinheim: Beltz PVU. 23-50.
- Rheinberg, F. (1997): Individuelle Bedingungsfaktoren der Schulleistung: Kommentar. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz PVU. 217-221.
- Rheinberg, F. (2001): Motivationstraining und Motivierung. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 478-483.
- Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik (1996). Hg. v. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Unveränderter Nachdruck der 1. Aufl. von 1985. Frechen: Ritterbach.
- Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen (2003). Hg. v. Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach.
- Ricken, G. & Fritz, A. (2005): Fit für das Rechnen – Früherfassung mathematischer Kompetenzen. In Verband Sonderpädagogik (Hrsg.), Fit fürs Lernen! Erziehung und Unterricht für Kinder mit dem Förderschwerpunkt Lernen in der Primarstufe. Würzburg: 2005. 221-226.

- Ricken, G. (2000): Kognitive Komponenten und deren Förderung im Vorschulalter. In G. Siepmann (Hrsg.), Frühförderung im Vorschulbereich. Beiträge einer Interdisziplinären Arbeitstagung zur Frühförderung am Institut für Sonderpädagogik der Universität Potsdam i. Sept. 1999. Sonderdruck 2000. Frankfurt a.M.: Peter Lang. 179-195.
- Ricken, G. (2003a): Psychometrische und entwicklungsorientierte Verfahren zur Diagnostik des Rechnens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (2003) (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 260-282.
- Ricken, G. (2003b): Entwicklungsorientierte Diagnostik am Beispiel mathematischer Kompetenzen. In G. Ricken, A. Fritz & Ch. Hofmann (Hrsg.), Diagnose: Sonderpädagogischer Förderbedarf. Lengerich: Pabst. 345-366.
- Ricken, G., Fritz, A. & Hofmann, Ch. (2003) (Hrsg.): Diagnose: Sonderpädagogischer Förderbedarf. Lengerich: Pabst.
- Rijt, B.A.M. van de, Luit, J.E.H. van & Hasemann, K. (2000): Zur Messung der frühen Zahlbegriffsentwicklung. In Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 32 (1), 14-24.
- Rost, D.H. (Hrsg.) (2001): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Beltz PVU.
- Roth, E. & Schneider, W. (2002): Langzeiteffekte einer Förderung der phonologischen Bewusstheit und der Buchstabenkenntnis auf den Schriftspracherwerb. In Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 16 (2). 99-107.
- Scheerer-Neumann, G. (2001): Lese-Rechtschreibschwäche. In W. Einsiedler, M. Götz, H. Hacker, J. Kahlert, R.W. Keck & U. Sandfuchs (Hrsg.): (Hrsg.), Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik. Bad Heilbrunn / Obb.: Klinkhardt. 436-442.
- Scherer, P. (1995): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Winter.
- Scherer, P. (1997): Lernen in kleinen Schritten oder in komplexen Umgebungen? In Grundschule 3/1997. 28-31.
- Scherer, P. (1998): Kinder mit Lernschwierigkeiten – „besondere" Kinder, „besonderer" Unterricht? In A. Peter-Koop (Hrsg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger. 99-118.
- Scherer, P. (1999a): Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Bd. 1: Zwanzigerraum. Leipzig; Stuttgart; Düsseldorf: Klett.

- Scherer, P. (1999b): Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. In Die Grundschulzeitschrift, 121. 8-12.
- Scherer, P. (1999c): Mathematiklernen bei Kindern mit Lernschwächen. Perspektiven für die Lehrerbildung In Ch. Selter & G. Walther (Hrsg.), Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für E.Ch. Wittmann. Leipzig; Stuttgart; Düsseldorf: Klett Grundschulverlag. 170-179.
- Schiefele, U. & Heinen, S. (2001): Wissenserwerb und Motivation. In H.D. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 795-799.
- Schipper, W. (1998): „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen." Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger. 119-140.
- Schipper, W. (2001): Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. Occasional Paper 182: IDM Universität Bielefeld.
- Schmidt, S. & Weiser, W. (1982): Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. In Journal für Mathematikdidaktik 3/4. 227-263.
- Schneider, W. & Krajewski, K. (2005): Deutsche Mathematiktests für erste und zweite Klassen (DEMAT 1+ und DEMAT 2+). In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.) (2005): Diagnostik von Mathematikleistungen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends Bd. 4. Göttingen: Hogrefe. 153-166.
- Schnotz, W. (2001): Conceptual Change. In D.H. Rost (Hrsg.), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarb. u. erw. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 75-81.
- Schreiber, B. (1998): Selbstreguliertes Lernen. Münster: Waxmann.
- Schulz, A. (1998): Förderung „rechenschwacher" Schüler im Rahmen einer integrativen Lerntherapie – ein Erfahrungsbericht. In A. Peter-Koop (Hrsg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger. 83-98.
- Schulz, A. (2003) (Hrsg.): Rechenschwäche muss nicht sein. Zahlenraum bis 100. Paetec, Schubi.
- Schütte, S. (1994): Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen. Probleme und Perspektiven der Grundschulmathematik heute. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett Schulbuchverlag.

- Schütte, S. (1997): Rechengeschichten statt Textaufgaben: Mathematik und Sprache verbinden. In Die Grundschulzeitschrift 102/1997. 6-11.
- Seel, N.M. (2000): Psychologie des Lernens. Reihe UTB für Wissenschaft. München; Basel: Ernst Reinhardt.
- Selter, Ch. & Walther, G. (1999) (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für E.Ch. Wittmann. Leipzig; Stuttgart; Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.
- Selter, Ch. (1995): Zur Fiktivität der ‚Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht. In Mathematische Unterrichtspraxis, 2, S. 11-19.
- Siegler, R.S. (1997): Beyond competence – Toward development. In: Cognitive Development 12, 323-332.
- Simon, T.J. (1997): Reconceptualizing the Origins of Number Knowledge: A "Non-Numerical" Account. In Cognitive Development, 12, 349-372.
- Simon, T.J., Hespos, S.J. & Rochat, P. (1995): Do Infants Understand Simple Arithmetic? A Replication of Wynn (1992). In Cognitive Development, 10, 253-269.
- Sodian, B. (2002): Entwicklung begrifflichen Wissens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), Entwicklungspsychologie. 5., vollständig überarb. Aufl. Weinheim; Basel; Berlin: Beltz PVU. 443-468.
- Sophian, C. (1992): Learning About Numbers: Lessons for Mathematics Education From Preschool Number Development. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (eds.), Pathways to number. Hillsdale, N.J.: Erlbaum. 19-40.
- Sophian, C. (1997): Growing Points for Cognitive-developmental Theories: Characterizing Innate Foundations for Learning. In Cognitive Development, 12, 345-348.
- Souvignier, E. (2003): Instruktion bei Lernschwierigkeiten. In: G. Ricken, A. Fritz & Ch. Hofmann (Hrsg.), Diagnose: Sonderpädagogischer Förderbedarf. Lengerich: Pabst. S. 402-415.
- Spelke, E.S., Kestenbaum, R., Simons, D.J. & Wein, D. (1995): Spatiotemporal continuity, smoothness of motion and object identity in infancy. In British Journal of Developmental Psychology. 13/1995. 113-142.
- Starkey, P. & Cooper, R.G. Jr. (1980): Perception of Numbers by Human Infants. In Science, 210, 28, 1033-1035.
- Starkey, P., Spelke, E.S. & Gelman, R. (1990): Numerical abstraction by human infants. In Cognition, 36, 97-127.

- Steiner, G. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen: Kommentar. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz Psychologie Verlags Union. 171- 179.
- Steiner, G. (2001): Lernen und Wissenserwerb. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), Pädagogische Psychologie. 4., vollst. überarb. Aufl. Weinheim: Beltz PVU. 137-205.
- Stern, E. & Staub, F. (2000): Mathematik lernen und verstehen: Anforderungen an den Unterricht. In J. Kahlert (Hrsg.), Grundschule: Sich Lernen leisten. Neuwied; Kriftel: Luchterhand. 90-100.
- Stern, E. (1994a): Wie viele Kinder bekommen keinen Mohrenkopf? Zur Bedeutung der Kontexteinbettung beim Verstehen des quantitativen Vergleichs. In Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, Bd. XXVI, H.1, 79-93.
- Stern, E. (1994b): Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben. In Grundschule 3/1994. 23-25.
- Stern, E. (1996): Mathematik. In F.E. Weinert (Hrsg.), Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich D: Praxisgebiete, Serie I: Pädagogische Psychologie Bd. 3 Göttingen: Hogrefe. 397-426.
- Stern, E. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz Psychologie Verlags Union. 157-170.
- Stern, E. (1998): Die Entwicklung schulbezogener Kompetenzen: Mathematik. In F.E. Weinert (Hrsg.), Entwicklung im Kindesalter. Weinheim: Psychologie Verlags Union. 95-113.
- Stern, E. (2002): Wie abstrakt lernt das Grundschulkind? Neuere Ergebnisse der entwicklungspsychologischen Forschung. In Jahrbuch Grundschulforschung, Bd. 5: H. Petillon (Hrsg.): Individuelles und soziales Lernen in der Grundschule – Kindperspektive und pädagogische Konzepte. Opladen: Leske + Budrich. 27-42.
- Stern, E. (2003): Früh übt sich – Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Weinheim: Beltz. 116-130.
- Stern, E., Grabner, R. & Schumacher, R. (2005): Lehr-Lern-Forschung und Neurowissenschaften: Erwartungen, Befunde und Forschungsperspektiven. Hg. v. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF). Bonn; Berlin.

- Strauss, M.S. & Curtis, L.E. (1981): Infant Perception of Numerosity. In Child Development, 52, 1146-1152.
- Sydow, H. & Schmude, C. (2001): Training des analogen Denkens und des Zahlbegriffs im Vorschulalter – Analysen der Wirkung von drei Programmen zum kognitiven Training. In K.J. Klauer (Hrsg.), Handbuch Kognitives Training. 2. überarb. u. erw. Aufl. Göttingen; Bern; Toronto; Seattle: Hogrefe.129-164.
- Vorberg, D. & Blankenberger, S. (1993): Mentale Repräsentation von Zahlen. In Sprache & Kognition, 12, Heft 2, 98-114.
- Walter, J., Suhr, K. & Werner, B. (2001): Experimentell beobachtete Effekte zweier Formen von Mathematikunterricht in der Förderschule. In Zeitschrift für Heilpädagogik 4/2001. 143-151.
- Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003): Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, G. Walther & R. Valtin (Hrsg.), Erste Ergebnisse aus IGLU. Münster: Waxmann.189-226.
- Weinert, F.E. & Helmke, A. (1997): Theoretischer Ertrag und praktischer Nutzen der SCHOLASTIK-Studie zur Entwicklung im Grundschulalter. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz PVU.
- Weinert, F.E. & Helmke, A. (Hrsg.) (1997): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Beltz PVU.
- Weinert, F.E. (2000): Begabung und Lernen. Zur Entwicklung geistiger Leistungsunterschiede. In Neue Sammlung, 3. 353-368.
- Weinhold Zulauf, M., Schweiter, M. & Aster, M. von (2003): Das Kindergartenalter: Sensitive Periode für die Entwicklung numerischer Fertigkeiten. In Kindheit und Entwicklung 12 (4). 222-230.
- Weißhaupt, S., Peukert, S. & Wirtz, M. (2006): Diagnose mathematischer Konzepte im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. Psychologie in Erziehung und Unterricht 53.
- Wember, F.B. (1986): Piagets Bedeutung für die Lernbehindertenpädagogik: Untersuchungen zur kognitiven Entwicklung und zum schulischen Lernen bei Sonderschülern. Heidelberg: Edition Schindele.

- Wild, E. & Remy, K. (2002): Affektive und motivationale Folgen der Lernhilfen und lernbezogenen Einstellungen von Eltern. In Unterrichtswissenschaft – Zeitschrift für Lernforschung, 1. 27-52.
- Winter, F. (2002): Portfolio und Leistungsbewertung. In die 1/2002. 91-98.
- Winter, H. (1994a): Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule. 4. Aufl. Frankfurt a.M.: Cornelsen Scriptor.
- Winter, H. (1994b): Sachrechnen in der Grundschule. 3. Aufl. Frankfurt a.M.: Cornelsen Scriptor.
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1993): Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett Schulbuchverlag.
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (Hrsg.) (2001): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Lehrerband. Leipzig: Klett Grundschulverlag.
- Wittmann, E.Ch. (1994): Üben im Lernprozeß. In E.Ch. Wittmann & G.N. Müller (Hrsg.), Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett Schulbuchverlag. 175-182.
- Wittmann, E.Ch. (2000): Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. 2., unveränd. Aufl. v. 1995. Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband e.V. 10-41.
- Wynn, K. (1990): Children's understanding of counting. In Cognition, 36. 155-193.
- Wynn, K. (1992): Addition and subtraction by human infants. In Nature, 358,749-750.
- Wynn, K. (1995): Origins of Numerical Knowledge. In Mathematical Cognition, 1, 35-60.
- Wynn, K. (1996): Infant's Individuation and Enumeration of Actions. In Psychological Science, 7, 3, 164-169.
- Xu, F. & Carey, S. (1996): Infants' Metaphysics: The Case of Numerical Identity. In Cognitive Psychology, 30, 111-153.
- Xu, F. & Carey, S. (2000): The emergence of kind concepts: a rejoinder to Needham and Baillargeon (2000). In Cognition, 74, 285-301.
- Xu, F. & Spelke, E.S. (2000): Large number discrimination in 6-month-old infants. In Cognition, 74, B1-B11.
- Ziegler, A. (1999): Motivation. In Ch. Perleth & A. Ziegler (Hrsg.), Pädagogische Psychologie. Bern; Göttingen; Toronto; Seattle: Huber. 103-112.

5. Abbildungsverzeichnis

6. Tabellenverzeichnis